实用高等数学

勾丽杰　编著



東北大學出版社
Northeastern University Press

实用高等数学

勾丽杰　编著

东 北 大 学 出 版 社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

实用高等数学 /勾丽杰编著. —沈阳：东北大学出版社，2008.5
ISBN 978-7-81102-524-8

Ⅰ.实… Ⅱ.勾… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 052491 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×228mm
印 张：13.75
字 数：262 千字
出版时间：2008 年 5 月第 1 版
印刷时间：2008 年 5 月第 1 次印刷
责任编辑：潘佳宁 刘宗玉 责任校对：汪 莹
封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-524-8 定 价：26.80 元

前　　言

近几年，随着高职高专教学改革的不断深入，对高等数学、工程数学的基本要求有了较大变化。为了达到专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应，满足不同专业类别对数学教学的具体要求，结合教学改革实际，编写了这本具有一定特色、优化配套的高职高专数学教材。

在编写过程中，充分考虑了各专业类别的特点和对数学知识的基本要求。力求做到条理清晰，论述准确；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；课后习题配备全面充分；深广度要求适当；注意理论联系实际，重视学生能力的培养。尽可能使数学的概念、理论与应用相结合，并适当增加数学在物理、力学中的应用举例，更适合于高职高专层次的学生学习和课堂教学，有较强的针对性。

本教材可供土建、机电类各专业使用，由勾丽杰编著。

编　者

2008 年 2 月



目　　录

第一章 函数 极限 连续

高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念，它是这门课程的基本推理工具. 连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象.

本章首先复习总结中学已学过的有关函数的知识，介绍复合函数、初等函数等概念，然后着重讨论函数极限的基本概念及其主要运算方法，最后用极限的方法研究函数的连续性.

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设 D 是某一实数集，若当变量 x 在 D 中每取一个数值时，另一变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，函数 y 又称为**因变量**.

自变量 x 的取值范围 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，当 x 取遍 D 中的所有实数时，其对应的函数值所构成的集合 M 叫做函数的**值域**.

有关函数定义的几点说明：

(1) 定义 1.1 给出的是单值函数的定义，如果对定义 1 中的“变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应”这句话中去掉“唯一”二字，那么定义 1.1 就成为多值函数的定义了. 例如，由方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的以 x 为自变量的函数为 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$.

可以看出，对于任意 $x\in[-a, a]$，上式确定了两个 y 值，即函数 y 是由两个单值函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 所构成的多值函数. 今后如无特殊说明，所研究的函数都是指单值函数.

(2) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本条件. 判断两个函数是否为同一函数时，要看两个基本条件是否完全相同，完全相同才是相同的函数. 例如，函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数，因为它们的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，对应的法则同为 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 但函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是

两个不同的函数，因为它们的定义域不同．前者的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，而后者的定义域为$(0, +\infty)$．

(3)在同一问题中有时可能出现几个函数，为了区别函数的不同对应法则，这时必须用不同的字母表示不同的函数关系，如$\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$等．

例 1.1 求函数$f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域．

解 这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可，即

$$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1. \end{cases}$$

解此不等式组，得

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2, \\ -3\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$$

所以函数的定义域为$D=[-3, -2]\cup[3, 4]$．

2．反函数

定义 1.2 设函数$y=f(x)$，其定义域为D，值域为M，如果对于任意$y\in M$，在D中都有唯一确定的x值$(x\in D)$与之对应，那么，由此所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$（或$x=f^{-1}(y)$）叫做函数$y=f(x)$的**反函数**，它的定义域为M，值域为D．

习惯上用x表示自变量，y表示因变量，所以，用$y=\varphi(x)$或$y=f^{-1}(x)$来表示$y=f(x)$的反函数．函数与其反函数的图像关于直线$y=x$对称．

例 1.2 求下列函数的反函数，并指出它们的定义域与值域：

(1) $y=\pi+\arctan\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=-\sqrt{x-1}$．

解 (1) 由原式解出x，得$x=2\tan(y-\pi)$．习惯上仍记x为自变量，y为因变量，即所求函数的反函数为$y=2\tan(x-\pi)$．由于原函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，而值域是$\pi-\dfrac{\pi}{2}<\pi+\arctan\dfrac{x}{2}<\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即$\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{3\pi}{2}$．因此所求反函数$x=2\tan(y-\pi)$的定义域是$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$，值域是$(-\infty, +\infty)$．

(2) 由原式解出x，得$x=y^2+1$，在把x与y互换，即得所求反函数为$y=x^2+1$．

由于原函数的定义域是$[1, +\infty)$，值域是$(-\infty, 0]$，所以所求反函数的定义域为$(-\infty, 0]$，值域为$[1, +\infty)$．

3．函数的几种特性

(1) 函数的单调性．

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，x_1 及 x_2 为 I 上任意两点．如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上是单调递增的；如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上是单调递减的．单调递增及单调递减的函数统称为单调函数．使单调函数成立的区间 I 称为函数的单调区间．

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty, 0)$内单调递减，在区间$(0, +\infty)$内单调递增．

(2) 函数的有界性．

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对一切 $x\in I$ 都有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在 I 上是有界的，或说 $f(x)$是有界函数．否则，称函数 $y=f(x)$在 I 上是无界的，或说 $f(x)$是无界函数．

例如函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上恒有

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

所以这个函数在$(-\infty, +\infty)$上是有界的．

函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0, +\infty)$内无界，但在$[\varepsilon, +\infty)(\varepsilon>0)$内有界．可见函数的有界性不但与函数本身有关，还要取决于存在的区间．

(3) 函数的周期性．

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在常数 $T>0$，使得对于任意 $x\in D$，当 $x+T\in D$ 时，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为周期函数．最小的正数 T 称为它的周期．

例如，三角函数都是周期函数．

(4) 函数的奇偶性．

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称，如果对任意 $x\in D$ 都有$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数；如果对任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数．

例如，函数 $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，$y=3x^2$ 和 $y=x^2-5\cos x$ 都是偶函数；函数 $y=x^3$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$和 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+x^2}$都是奇函数；而函数 $y=e^x$ 和 $y=x^2+5x-\sin x$ 是非奇非偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数.

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$ $(\mu\in\mathbf{R})$;

(2)指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(3)对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(4)三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$;

(5)反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

为了便于应用,将它们的定义域、值域、图象和主要性质列表如下(表 1-1).

表 1-1 **基本初等函数图像**

函数	幂函数 $y=x^{\mu}$			
	$\mu=1,3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像	$y=x^3$, $y=x$	$y=x^2$	$y=\sqrt{x}$	$y=\frac{1}{x}$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值 域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增	在$(-\infty,0)$内单调减,在$(0,+\infty)$内单调增	单调增	在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$内分别单调减

函数	指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像	$y=a^{x}$	$y=a^{x}$	$y=\log_{a}x$	$y=\log_{a}x$
定义域	$(\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值 域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

续表 1-1

函数	$y=\sin x$（正弦函数）	$y=\cos x$（余弦函数）	$y=\tan x$（正切函数）	$y=\cot x$（余切函数）
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in Z)$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in Z)$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	单调增	单调减	单调增	单调减
$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	单调减	单调减	单调增	单调减
$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	单调减	单调增	单调增	单调减
$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$	单调增	单调增	单调增	单调减

函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\text{arccot}\,x$（反余切函数）
图像				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\text{arccot}(-x)=\pi-\text{arccot}\,x$

这些基本初等函数在初等数学中已作过详细介绍．在此，不再赘述．

2．复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$的函数值全部或部分落在 $f(u)$的定义域内，此时 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称此函数为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

u 称为**中间变量**．

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域与 $u=\sin x$ 的定义域相同，都是全体实数 $\mathbf{R}$．

又如，$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域$[-1, 1]$是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty, +\infty)$的子集．

再如，$y=\arcsin u$ 的定义域$[-1, 1]$，$u=x^2+2$ 的值域为$[2, +\infty)$，从而对于 $u=x^2+2$ 定义域中的任意一个 x 值，按 $u=x^2+2$ 所得的 u 值，均不属于$[-1, 1]$范围内．所以不能构成复合函数．

复合函数的中间变量可以是多于一个的，即复合函数可由多个函数进行有限次复合而成．例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 可构成复合函数 $y=\sin\sqrt{1-x}$，这里 u，v 都是中间变量．

在研究复合函数这个概念时，有时我们重点并不在"复合"，而在于"分解"，即如何把一个复合函数分解为几个简单的函数，此时应由外向里逐层分解．所谓简单函数是指基本初等函数及其由四则运算构成的函数．

例 1.3 将下列函数分解成几个简单函数：

(1) $y=2^{\sin x}$；　　(2) $y=\tan^3(2x^2+1)$；

(3) $y=\sqrt{2+\ln(a^x+3)}$；　　(4) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^5$．

解

(1) $y=2^u$，$u=\sin x$．

(2) $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=2x^2+1$．

(3) $y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=2+\ln v$，$v=a^x+3$．

(4) $y=u^5$，$u=\arcsin v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=1-x^2$．

3．初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数．例如 $y=\frac{\sin x}{x}+\cos x$，$y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$；$y=\sqrt[3]{\sin^2 x+5\sin x+1}$，$y=a^{x^2+\tan x}$等都是初等函数．初等函数是最常见的函

数，它是微积分研究的主要对象.

而分段函数 $y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ $y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 等，不能用一个式子表示，因此分段函数通常不是初等函数，但也有例外. 例如分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$

即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，可看作是 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的，因此它是一个初等函数.

习题 1-1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=\ln x$；

(2) $f(x)=\sqrt{(x-y)^2}$，$g(x)=|y-x|$；

(3) $f(x)=2-x$，$g(x)=\dfrac{4-x^2}{2+x}$；

(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x-1})^2$，$g(x)=2\ln(x-1)$；

(5) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1;\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+4}$；　(2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{1-|x|}$；　(4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$；　(6) $y=\arccos\sqrt{2x}$；

(7) $y=\dfrac{x}{\tan x}$；　(8) $y=\lg\sin x$.

3. 求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域：

(1) $y=x^2-2x\quad(x>1)$；　(2) $y=10^{x+1}$；

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(4) $y=\sin x\quad\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\right)$；

(5) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. 将下列函数分解成简单函数：

(1) $y=\sin^3(8x+5)$；　(2) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$；

(3) $y=a^{[\arcsin(e^x+1)]^2}$; (4) $y=\ln[\tan^3(5x^2+7)+3]$;

(5) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$; (6) $y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

第二节 极 限

极限是高等数学中最重要的概念之一，是研究微积分学的重要工具. 微积分中的许多概念，如函数的连续性、导数、定积分等，均通过极限来定义. 这一概念是由求某些实际问题的精确值而产生的. 下面我们先来看一个引例.

引例 求由抛物线 $y=x^2$, $x=1$ 及 x 轴所围成的图形(称为曲边三角形)的面积，如图 1-1 所示.

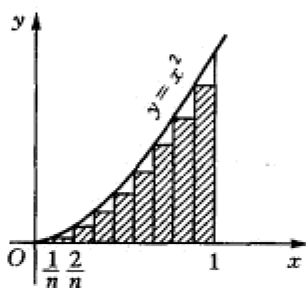


图 1-1

解 将区间[0, 1]等分为 n 个小区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$, …, $\left[\frac{n-1}{n},1\right]$, 称为子区间，依次作 n 个内接小矩形如图示，它们的的面积为：

$$\frac{1}{n}\times 0,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

若将这 n 个小矩形的面积之和 S_n 作为曲边三角形面积 S 的近似值，则有

$$\begin{aligned}S\approx S_n&=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由图 1.1 不难发现，n 越大，S_n 越接近 S. 显然，当 n 无限地增大时，S_n 就无限地接近或者说趋近于 S. 另一方面分析 S_n 的表达式知，当 n 无限地增大时，S_n 就无限地趋近于 $\frac{1}{3}$，于是可以断言该曲边三角形的面积为 $\frac{1}{3}$.

实际上，这里讨论的是当自变量 n 无限地增大时，函数 S_n 的变化趋势. 一般地，极限概念指的是在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势.

为叙述方便，引入以下记号：

当 x 从 x_0 的左右两侧无限接近 x_0 时，记作 $x\to x_0$(读作 x 趋于 x_0)；

当 x 从 x_0 的右侧无限接近 x_0 时，记作 $x\to x_0^+$；

当 x 从 x_0 的左侧无限接近 x_0 时，记作 $x\to x_0^-$；

当 x 无限增大时，记作 $x\to+\infty$(读作 x 趋于正无穷)；

当 x 无限减小时，记作 $x\to-\infty$(读作 x 趋于负无穷)；

当 $|x|$ 无限增大时，记作 $x\to\infty$(读作 x 趋于无穷).

下面我们根据自变量 x 无限趋近于“目标”的方式不同，分别介绍函数的极限.

一、函数的极限

1. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

为了便于理解 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限的定义，我们先从图形上观察两个具体的函数.

不难看出，当 $x\to1$ 时，$f(x)=x+1$ 无限接近于 2(图 1-2)；当 $x\to1$ 时，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2(图 1-3). 函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是两个不同的函数，前者在 $x=1$ 处有定义，后者在 $x=1$ 处无定义. 这就是说，当 $x\to1$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 的极限是否存在与其在 $x=1$ 处是否有定义无关.

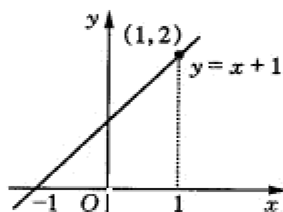


图 1-2

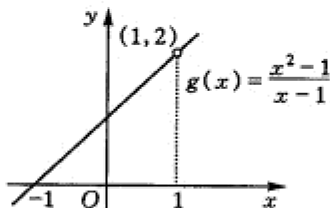


图 1-3

这里先介绍一下邻域的概念：开区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 称为以 x 为中心，以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域，简称为点 x 处的邻域，记作 $U(x,\delta)$. 一般地说，为了使 $x\to x_0$ 时函数极限的定义适用范围更广泛，我们不必要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，只需要求 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$　$(\delta>0)$ 内有定义即可, 以后，用 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 表示 x_0 的空心邻域.

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内有定义，当自变量 x 在 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内无限接近于 x_0 时，相应的函数值无限接近于常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

由定义 1.4 可见，

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2;$$

$$\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

2. $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右半邻域 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，当自变量 x 在此半邻域内无限接近于 x_0 时，相应的函数值无限接近于常数 A，则称

A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$，$f(x_0+0)=A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^+)$.

3. $x \to x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左半邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ 内有定义，当自变量 x 在此半邻域内无限接近于 x_0 时，相应的函数值无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，$f(x_0-0)=A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^-)$.

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & x>0, \end{cases}$ 画出该函数的图形，并讨论 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 是否存在.

解 函数 $f(x)$ 的图形如图 1-4 所示，由该图不难看出：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

例 1.5 设 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$（通常称 $\operatorname{sgn} x$ 为符号函数），画图讨论 $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$，$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ 是否存在.

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 的图形如图 1-5 所示，不难看出：

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1;$$

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1;$$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.

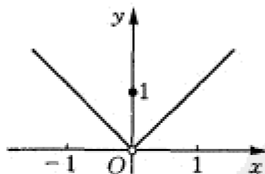


图 1-4

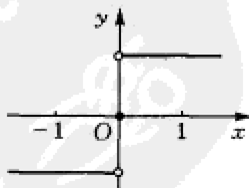


图 1-5

由左右极限的定义及上述两个例子不难看出，左右极限存在如下关系.

定理 1.1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

4. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

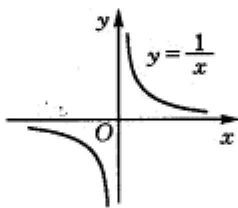


图 1-6

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 时有定义(a 为某个正实数)，如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

由图 1-6 可知：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

5. $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.8　设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义(a 为某个实数)，当自变量 x 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to+\infty)$.

由图 1-6 可知：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

6. $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.9　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内有定义(a 为某个实数)，当自变量 x 无限减小时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to-\infty)$.

由图 1-6 可知：$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

定理 1.2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

二、数列的极限

1. 数列的概念

自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$，其函数值按自变量 n 由小到大排列成一列数

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$$

称为数列，将其简记为 $\{u_n\}$，其中 u_n 为数列 $\{u_n\}$ 的通项或一般项. 例如，$u_n=\frac{1}{2^n}$，相应的数列为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

由于一个数列 $\{u_n\}$ 完全由其一般项 u_n 所确定，故经常把数列 $\{u_n\}$ 简记为 u_n.

2. 数列的极限

数列 $\{f(n)\}$ 的一般项 $f(n)$ 随自变量 n 的变化而变化. 由于 n 只能取正整

数，所以研究数列的极限，只需考虑自变量 $n\to+\infty$ 时函数 $f(n)$ 的极限．一般地，在研究数列极限时，把记号 $n\to+\infty$ 简记为 $n\to\infty$．

定义 1.10 对于数列 $\{u_n\}$，如果当 $n\to\infty$ 时，通项 u_n 无限接近于某一个确定的常数 A，则称该常数 A 是数列 $\{u_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{u_n\}$ **收敛于 A**，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \text{ 或 } u_n\to A\ (n\to\infty).$$

如果数列 $\{u_n\}$ 没有极限，就称该数列是发散的或极限不存在．

例 1.6 观察下列数列的极限：

(1) $u_n=\dfrac{n}{n+1}$； (2) $u_n=\dfrac{1}{2^n}$； (3) $u_n=2n+1$； (4) $u_n=(-1)^{n+1}$．

解 先列出所给的数列：

$u_n=\dfrac{n}{n+1}$，即 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，…；

$u_n=\dfrac{n}{2^n}$，即 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2^2}$，$\dfrac{1}{2^3}$，…，$\dfrac{1}{2^n}$，…；

$u_n=2n+1$，即 3，5，7，…，$2n+1$，…；

$u_n=(-1)^{n+1}$，即 1，-1，1，…，$(-1)^{n+1}$，…．

观察如上 4 个数列当 $n\to\infty$ 的发展趋势，得

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2n+1)$ 不存在；

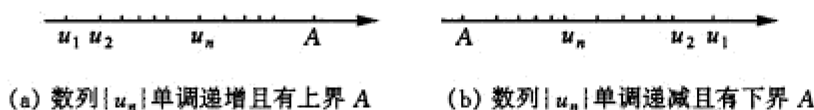
(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在．

如果数列 $\{u_n\}$ 对于每个正整数 n，都有 $u_n<u_{n+1}$，则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递增数列；类似地，如果数列 $\{u_n\}$ 对于每个正整数 n，都有 $u_n>u_{n+1}$，则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递减数列．如果对于数列 $\{u_n\}$，存在一个正常数 M，使得对于每一项 u_n，都有 $|u_n|\leqslant M$，则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列．数列 $\{u_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 为单调递增数列，且有上界；数列 $\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 为单调递减数列，且有下界．一般地，我们有

定理 1.3 （单调有界原理）单调有界数列必有极限．

该定理的证明超出了本书的要求，所以从略，但从几何图形上看，它的正确性是显而易见的．由于数列是单调的，因此它的各项所表示的点（图 1-7）在数轴上朝着一个方向移动，这种移动只有两种可能，一种是沿着数轴无限远移，另一种是无限接近于一个定点 A，而又不可能超越 A，终于密集在 A 的附近．

但前一种是不可能的，因为数列有界，所以只能为后者．换句话说，A 就是数列的极限．



(a) 数列$\{u_n\}$单调递增且有上界 A (b) 数列$\{u_n\}$单调递减且有下界 A

图 1-7

三、极限的性质

以上讨论了函数极限的各种情形，并把数列的极限作为函数极限的特殊情况给出．它们描述的问题都是：自变量在某一变化过程中，函数值无限逼近某个常数．因此，它们有一系列的共性，下面以 $x\to x_0$ 为例给出函数极限的性质．

性质 1.1 （唯一性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$．

性质 1.2 （有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 x_0 的某一空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$，在 $U(\hat{x}_0,\delta)$内函数有界．

性质 1.3 （保号性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且$A>0$（或 $A<0$），则存在某个空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$，在 $U(\hat{x}_0,\delta)$内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）．

推论 若在某个空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

则

$$A\geqslant 0\ (\text{或 } A\leqslant 0).$$

性质 1.4 （夹逼准则） 若 $x\in U(\hat{x}_0,\delta)$（其中 δ 为某一正常数)时，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A,$$

则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

从直观上看，该准则是显然的．当 $x\to x_0$ 时，函数 $g(x)$，$h(x)$的值无限逼近常数 A，而夹在 $g(x)$与 $h(x)$之间的 $f(x)$的值也无限逼近于常数 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．对于极限的上述 4 个性质，若把 $x\to x_0$ 换成自变量 x 的其他变化过程，有类似的结论成立．

四、关于极限概念的几点说明

为了正确理解极限的概念，再说明如下几点．

(1) 在一个变量前加上记号“lim”，表示对这个变量进行取极限运算，若变量的极限存在，所指的不再是这个变量本身而是它的极限，即变量无限接近的

那个值.

例如：设 A 表示圆面积，S_n 表示圆内接正 n 边形面积，则知当 n 较大以后，总有 $S_n \approx A$，但 $\lim\limits_{x\to\infty} S_n$ 就不再是 S_n 了，而是它的极限——圆面积 A. 所以它的表达式 $A=\lim\limits_{x\to\infty} S_n$ 不含任何近似成分.

(2) 在极限过程 $x\to x_0$ 中考查 $f(x)$时，我们只要求 x 充分接近 x_0 时 $f(x)$存在，与 $x=x_0$ 时或远离 x_0 时 $f(x)$取值如何是毫无关系的. 这一点在求分段函数的极限时尤其重要.

(3) 如上所给出的各种情形下的极限定义，均属于极限的形象描述，不属于严格的极限定义. 如所有极限定义中，皆要求自变量在某一变化过程中$f(x)$无限接近于确定的常数 A，那么，何谓 $f(x)$与定常数 A 无限接近？如何在数学上予以精确的描述？事实上，$f(x)$与定常数 A 无限接近是指$|f(x)-A|$可以任意小，即$|f(x)-A|$可以无限接近于 0. 换句话说，对任意给定的无论多么小的正数 ϵ，当 x 变化到一定程度后，总有$|f(x)-A|<\epsilon$成立. 由于自变量 x 的变化过程不尽相同，所以，其与"目标"无限接近的方式也就有不同的描述方法. 下面仅就 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$的极限给出精确的定义($\epsilon-\delta$ 定义)，供学有余力的同学参考.

定义 1.11 （极限的 ϵ-δ 定义） 设 $f(x)$在 x_0 的某个邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$中有定义，若对任意给出的正数 ϵ，存在 $\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有$|f(x)-A|<\epsilon$ 成立，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$以 A 为极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

(4) 常数函数的极限等于其本身，即$\lim\limits_{x\to\square} C=C$（$C$ 为常数且$x\to\square$表示 x 的任何一种变化过程).

习题 1-2

1. 观察下列数列是否有极限，若有极限，请指出其极限值：

(1) $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$；　(2) $f(n)=2+\dfrac{1}{n^2}$；

(3) $f(n)=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2^n}$；　(4) $f(n)=(-1)^n n$.

2. 下列极限是否存在？若存在，求出其极限值，若不存在，说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

3. 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右极限，并说明 $f(x)$

在 $x\to 0$ 时极限是否存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 3x^2, & 1<x<2,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}f(x)$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

第三节　无穷小量与无穷大量

在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的变化过程中，$f(x)$有两种特殊的变化情况，一种是 $f(x)\to 0$，另一种是 $|f(x)|$ 无限增大. 下面分别讨论这两种情况.

一、无穷小量的概念

1. 无穷小的定义

定义 1.12　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小.

又如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

一般来说，无穷小表达的是量的变化状态，而不是量的大小，一个常量不管多么小，都不能是无穷小量，零是唯一例外的. 简言之，无穷小量是绝对值无限变小且趋于零的变量.

例 1.7　自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小：

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$；　(2) $y=2x-1$；　(3) $y=2^x$；　(4) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷小；

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=0$，所以当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时，$2x-1$ 为无穷小；

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$，所以当 $x\to-\infty$ 时，2^x 为无穷小；

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ 为无穷小.

2. 无穷小的性质

性质 1.5　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 1.6 有界函数与无穷小量的积仍为无穷小量.

性质 1.7 有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例 1.8 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

解 因为$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\frac{1}{x}$是有界函数，又$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即 x 在$x\to 0$时为无穷小. 所以由性质 1.6 得 $x\sin\frac{1}{x}$在$x\to 0$ 时为无穷小. 即$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

例 1.9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$，因为$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界函数，而 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$是无穷小，所以由性质 1.6 得$\frac{1}{x}\sin x$ 在$x\to\infty$ 时为无穷小，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

3. 函数、极限与无穷小的关系

定理 1.4 设函数 $y=f(x)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷小.

例 1.10 当 $x\to\infty$时，将 $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+1}$写成其极限值与一个无穷小量之和的形式.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2$，$\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2+\frac{3}{x^2+1}$，

而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}=0,$$

于是$\frac{3}{x^2+1}$是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，所以当 $x\to\infty$时，$f(x)=2+\frac{3}{x^2+1}$是其极限值与一个无穷小量之和的形式.

二、无穷大量的概念

1. 无穷大的定义

定义 1.13 如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，它的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称函数 $f(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**，简称**无穷大**. 记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$).

例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时 $f(x)$的绝对值$|f(x)|=\frac{1}{|x-1|}$无限地增大，所以 $f(x)=\frac{1}{x-1}$是当 $x\to 1$ 时的无穷大，即$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

与无穷小量类似，无穷大量也是一个变量，而不是一个绝对值很大的数，且与自变量的变化过程有关．符号$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）只是一种记号，可以认为极限为$\infty$．但事实上，$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，$f(x)$的极限不存在．

如果在无穷大的定义中，将$|f(x)|$换成$f(x)$（或$-f(x)$），就记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)=+\infty\text{（或}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)=-\infty\text{）}.$$

例如，函数$y=2^x$，当$x\to+\infty$时，对应的函数值2^x无限地增大，则$y=2^x$是当$x\to+\infty$时的正无穷大，即$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$．函数$y=\lg x$，当$x\to0^+$时，对应的函数值使$-\lg x$无限地增大，则$y=\lg x$是当$x\to0^+$时为负无穷大量，即$\lim\limits_{x\to0^+}\lg x=-\infty$.

2．无穷小量与无穷大量的关系

定理 1.5　当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，如果$f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，如果$f(x)$为无穷小量，且$f(x)\neq0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

例 1.11　计算极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x^2}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)=0$，即函数$1-x^2$在$x\to1$时为无穷小，由定理1.5得

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x^2}=\infty.$$

习题 1-3

1．下列函数对于给定的自变量的趋向，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1) $f(x)=x^2+0.9x$，当$x\to0$时；

(2) $f(x)=\cot x$，当$x\to0$时；

(3) $f(n)=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}$，当$n\to\infty$时；

(4) $f(x)=\dfrac{1+2x}{x-1}$，当$x\to1$时.

2．下列函数$f(x)$在x趋向何值时是无穷小量？在趋向何值时是无穷大量？

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\tan x$；

(3) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$；

(5) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;　　(6) $f(x)=\ln x$.

3. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

第四节　极限的运算法则

本节仅讨论当 $x\to x_0$ 时，函数极限的运算法则，但这些法则对于自变量的其他变化过程(包括数列)也正确.

一、极限的四则运算法则

定理 1.6 （四则运算法则） 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，$A$，$B$ 为有限常数，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)][\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

定理 1.6 的结论(1)及(2)可以推广到有限个函数的和(差)及乘积的情形.

注　使用极限的四则运算法则时，应注意它们的条件，即当每个函数的极限都存在时，才可使用和、差、积的极限法则；当分子、分母的极限都存在，且分母的极限不为零时，才可使用商的极限法则.

由法则(2)可以得到以下几个推论.

推论 1　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$c$ 是有限常数，则

$$\lim_{x\to x_0}cf(x)=c\lim_{x\to x_0}f(x).$$

推论 2　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，其中 A 是有限的常数，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n,$$

这里 n 是正整数，且与自变量 x 无关.

推论 2 说明，正整数次幂的运算及极限的运算，在极限存在的前提下，可以交换运算次序.

例 1.12　设有理函数为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\ (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0),$$

且 $Q(x_0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$（$c$ 为常数），于是利用定理 1.6 的法则(1)及两个推论，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\&=a_0\lim_{x\to x_0}x^n+a_1\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}a_n\\&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=P(x_0).\end{aligned}$$

同理

$$\lim_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0).$$

又已知 $Q(x_0)\neq 0$，因此，根据定理 1.6 的法则(3)，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\quad (Q(x_0)\neq 0).$$

利用此公式可以较易地计算一些有理函数的极限.

例 1.13 求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-1}{x+4}$.

解 因为分母 $2+4\neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-1}{x+4}=\frac{2^3+2^2-1}{2+4}=\frac{11}{6}.$$

当 $Q(x_0)=0$ 时，不能用本节定理 1 的法则(3)去求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$，但是如果还有 $P(x_0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{0}{P(x)}=0,$$

所以，当 $x\to x_0$ 时，函数 $\frac{Q(x)}{P(x)}$ 为无穷小，因此，它的倒数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为无穷大，即有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty\quad (Q(x_0)=0,\ P(x_0)\neq 0).$$

如果不仅 $Q(x_0)=0$，而且还有 $P(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是否存在不能完全肯定，需作具体分析.

例 1.14 求 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$.

解 当 $x\to -1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的分子与分母的极限都为 0，但由于 $x\to$

$-1, x \neq -1$，所以，在求极限前，可以约去分子、分母的公因式 $x+1$，因此

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1}(x-1) = -2.$$

例 1.15 求 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

解 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = \frac{-(1+2)}{1+1+1} = -1.$$

例 1.15 的结果说明，在自变量的同一变化过程中，两个无穷大(当 $x \to 1$ 时，$\frac{1}{1-x}$ 和 $\frac{3}{1-x^3}$ 均为无穷大)的差不一定为无穷大. 解题时，不能盲目地将无穷小的运算性质照搬到无穷大的情形.

例 1.16 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+2x+1}{-x^2-1}$； (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^3+2x+2}$； (3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^4+x-2}{x^2+1}$.

解

(1) 因为 $x \to \infty$ 时，分子和分母的极限为无穷大(即极限不存在)，故不能用极限的四则运算法则，将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^2，再利用定理 1.6 及结论，于是有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+2x+1}{-x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + 2\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty}(-1) - \lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{-1-0} = -2.$$

(2) 在分子、分母中，分别除以 x 的最高次幂 x^3，于是有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^3+2x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{0-0}{1+0+0} = 0.$$

(3) 先求 $\frac{3x^4+x-2}{x^2+1}$ 的倒数 $\frac{x^2+1}{3x^4+x-2}$ 的极限，类似于前两题的做法，在分子、分母中同除以 x 的最高次幂 x^4，于是有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{3x^4+x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}} = \frac{0+0}{3+0+0} = 0,$$

所以 $x \to \infty$ 当时，$\frac{x^2+1}{3x^4+x-2}$ 为无穷小，因此，它的倒数 $\frac{3x^4+x-2}{x^2+1}$ 为无穷大，

即有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x-2}{x^2+1}=\infty.$$

例 1.16 的结论可以推广到一般的有理函数的情形，就有结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & \text{当 } m>n \text{ 时};\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n \text{ 时};\\ \infty, & \text{当 } m<n \text{ 时}.\end{cases}$$

例 1.17 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n-2)(n+4)}$.

解 分子、分母同除以 n 的最高次幂 n^3，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n-2)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1\times1\times1}{1\times1}=1.$$

例 1.18 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{4^n+1}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n-1}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}-\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right)^2}{1+\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right)^2}=\frac{0}{1}=0.$$

最后，必须强调，极限的四则运算法则只对有限项的和(差)或有限项的乘积有效. 如果在自变量的变化过程中，和(差)或乘积的项数相应地无限增多(习惯上，称为无限项求和(差)或求乘积)，则不能用定理 1.6 的有关法则.

例 1.19 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解 当 $n\to\infty$ 时，分子中的和式 $1+2+\cdots+n$ 的项数也在无限增多，因此，不能用定理 1.6 中的法则. 由于 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n}{2}(n+1)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

二、复合函数的极限

定理 1.7 设函数 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成，如果$\lim\limits_{x\to x_0}u=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$，$\lim\limits_{u\to b}f(u)=f(b)$（$b$ 是有限的常数），则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

此式说明，函数记号与极限记号可以交换次序.

例 1.20 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

解 分子、分母的极限都是 0，不能用商的极限法则. 在分子、分母中同乘以分子的共厄根式，于是有

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

例 1.21 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\cdots\times\sqrt[2^n]{2})$.

解 当 $n\to\infty$时，乘积的项数在无限增多，故不能用积的极限运算法则. 因为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\cdots\times\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}}$$
$$=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}=2.$$

习题 1-4

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x-3}\right)$； (3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$； (5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x^2+5}{(x-1)^2}$； (6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-x-2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；　(8) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)$；　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2-2x+5}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+6}{x^4-3x^2+3}$；　(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{n^3}$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n+8}{3n^4+6n+7}$；　(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n-1}{e^{2n}+1}$；　(15) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cos x$；　(16) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；　(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}}{1+x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+3x+1})$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=0$，求 a，b 的值.

第五节　两个重要极限　无穷小的比较

一、极限存在的夹逼准则

定理 1.8　(夹逼准则)如果 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内满足条件

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. 则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证　函数$\dfrac{\sin x}{x}$对于一切$x\neq0$ 都有定义，设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 在如图 1-8 所示的单

位圆中，令$\angle AOB = x$（弧度），则

$$\frac{1}{2}\sin x = |BC|,\ x = \overset{\frown}{AB},\ \tan x = |AD|.$$

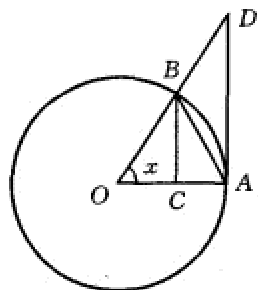


图 1-8

因为ΔAOB的面积<扇形AOB面积<ΔAOD的面积，所以

$$\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

同时除以$\sin x$，得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

从而有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因为当x用$-x$代替时，$\cos x$与$\frac{\sin x}{x}$都不变，所以上述不等式对于满足$-\frac{\pi}{2} < x < 0$也是成立的．由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，$\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$，根据夹逼准则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

注 这个重要极限是$\frac{0}{0}$型的，为了强调其形式，我们把它形象地写成$\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square} = 1$（方框□代表同一变量）．

例 1.22 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$．

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{3x}{4x}\right) = \frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}.$$

例 1.23 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$

例 1.24 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\frac{1}{\frac{\tan 5x}{5x}\cdot 5x} = \frac{3}{5}.$

例 1.25 求$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$．

解 令 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

例 1.26 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}.$$

例 1.27 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

考察当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的变化趋势(表 1-2).

表 1-2

n	1	2	5	10	100	1000	10000	100000⋯→+∞
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.49	2.59	2.705	2.717	2.718	2.71827⋯

从上表可以看出，当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的对应值会无限地趋近于一个确定的数 2.718281828459045⋯.

可以证明，当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限存在，我们用 e 表示这个极限值，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

e 是个无理数，它的值是

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots.$$

可以进一步证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

此式当 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时也成立．特别地，设 $z=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$z\to0$，于是有

$$\lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

注 为了准确地用好这个极限，我们指出，它有两个特征，一是它属于 1^{∞} 型的极限；二是它可以形象地表示为 $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$（方框□代表同一变量）．

例 1.28 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令 $z=-x$，则当 $x\to\infty$ 时，，$z\to\infty$ 时，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 1.29 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$.

解法一 令 $z=\frac{x}{2}$，则当 $x\to\infty$ 时，$z\to\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{10z}=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{10}=\mathrm{e}^{10}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{10}=\mathrm{e}^{10}.$

例 1.30 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-8x)^{\frac{1}{x}}$.

解法一 令 $z=-8x$，则当 $x\to0$ 时，$z\to0$，所以

$$\lim_{x\to0}(1-8x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}(-8)}=\lim_{z\to0}[(1+z)^{\frac{1}{z}}]^{-8}=\mathrm{e}^{-8}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-8x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(-8x)]^{\frac{1}{-8x}\times(-8)}=\mathrm{e}^{-8}.$

例 1.31 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}\cdot(-3)}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{-3}}=\mathrm{e}^{5}.$

例 1.32 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln\mathrm{e}=1.$

例 1.33　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $u=e^x-1$，则 $x=\ln(1+u)$，当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1$(此处直接利用了例 1.32 的结果).

三、无穷小的比较

1. 无穷小量的阶

在自变量的同一变化过程中的两个无穷小量，虽然都趋于 0，但它们趋于 0 的速度可能不同，甚至差别很大. 例如 x，$3x$，x^2，当 $x\to 0$ 时都是无穷小量，但它们趋向 0 的速度却不一样. 列表比较如下(表 1-3).

表 1-3

x	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001…	→0
$3x$	1.5	0.3	0.03	0.003	0.0003…	→0
x^2	0.25	0.01	0.0001	0.000001	0.00000001…	→0

由此表可见，x^2 比 x 与 $3x$ 趋于 0 的速度快得多. 对于自变量在某个变化过程中，无穷小量趋向 0 时的速度快慢的比较，有如下定义

定义 1.14　设 α，β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小量

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β **高阶的无穷小**，记为 $\alpha=o(\beta)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β **低阶的无穷小**；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$($C$ 为常数)，则称 α 与 β 是**同阶无穷小**；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta$.

例如，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小，可记为 $x^2=o(3x)$ (当 $x\to 0$)；由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$ 可得，当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小.

例 1.34　当 $x\to 0$ 时，比较无穷小$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与 x^2 的阶.

解　因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)(1-x)}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1.$$

所以

$$\frac{1}{1-x}-1-x\sim x^2,$$

即$\frac{1}{1-x}-1-x$与x^2是等价无穷小.

2. 用等价无穷小计算极限

定理 1.9 如果在自变量的同一变化过程中，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在(或∞)，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证 因为$\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=1$，$\lim\frac{\beta}{\beta'}=1$，所以

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

这个定理说明，求两个无穷小商的极限时，分子、分母可分别用它们的等价无穷小代替. 这是简化极限运算的一种方法.

下面列出一些常用的等价无穷小：

当$x\to 0$时，

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$.

例 1.35 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解 当$x\to 0$时，$\sin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

例 1.36 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^3+5x}$.

解 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^3+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^3+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2+5}=\frac{1}{5}.$$

例 1.37 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解 当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

例 1.38 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+4x)\sim4x$，$\sin2x\sim2x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x}=2.$$

这里需注意的是，等价代换是对分子或分母的整体或部分因式进行替换，而对分子、分母中“+”“-”号连接的各部分不能分别作替换.

例如，在例1.27中，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$，若 $\tan x$ 与 $\sin x$ 分别用其等价无穷小 x 代换，则有$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$，这样是错误的.

习题 1-5

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan kx}{x}$($k$ 为常数)； (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin7x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$； (5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$； (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2\frac{x}{3}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{3x}$； (8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x}$； (3) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x}$； (5) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{3-x}\right)^{2x}$； (9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

3. 当 $x\to1$ 时 $1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否同阶？是否等价？

4. 证明当 $x\to-3$ 时 x^2+6x+9 是比 $x+3$ 高阶的无穷小.

5. 用等价无穷小代换，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\tan2x}$； (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{\ln(1+x^2)}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$； (5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^2\sin x}$； (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3\tan^2x)}{\arcsin x^2}$.

第六节 函数的连续性与间断点

一、函数连续性与间断点

1. 函数的连续性

在自然界和日常生活中有许多现象，如气温的变化、河流的流动、生物的生长等等，都是随时间而连续变化的. 这些现象反映在函数的图形上，就是连续而无间隙的情形. 这也就是我们要讨论的函数连续性问题.

定义 1.15 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域(包括 x_0)内有定义，且当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的极限存在，并有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处是连续的.

定义 1.15 还能表述成另一种形式. 在叙述之前，我们先介绍自变量 x 的增量(改变量)及函数 $f(x)$的增量(改变量)的概念.

设 x_0 是自变量变化区间内一个给定的值，x 是另一个值，差式

$$\Delta x=x-x_0$$

称为自变量 x 在x_0 处对应的增量(改变量)，x 和x_0 所对应的函数值的差

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$在 x_0 处对应的增量(改变量). Δy 又可写成

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

于是有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

综合上面的分析就得到函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的等价定义.

定义 1.16 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域(包括 x_0)内有定义，如果当自变量 x 在x_0 处的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，相应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$在点 x_0 处连续.

2. 左、右连续及连续的充要条件

由左、右极限的概念，我们可建立左、右连续的概念.

定义 1.17 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限存在，且等于函数值 $f(x_0)$，即

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限存在，且等于函数值 $f(x)$，即

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右**连续**.

定理 1.10 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右连续，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

注 此公式有两个等号，第一个等号表明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，第二个等号表明 $f(x)$ 的极限等于函数值 $f(x_0)$.

下面，我们来给出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的定义.

定义 1.18 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，或称 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

例 1.39 确定常数 a，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<\dfrac{\pi}{2},\\ a+x, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续.

解 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(a+x)=a+\dfrac{\pi}{2}.$

根据函数连续的充要条件知，要使 $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续，必须

$$f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$a+\frac{\pi}{2}=1.$$

因此，当 $a=1-\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处连续.

3．函数的间断点及其分类

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点.

根据连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续的原因，无外乎下列三种情况之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to 0x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数的间断点可分为两类.如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点且在点 x_0 处的左右极限都存在，则点 x_0 称为第一类间断点；否则，称为第二类间断点.在第一类间断点中，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在且相等，则称点 x_0 为可去间断点，这时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 或者没有定义，或者虽有定义，但 $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在但不相等，则称点 x_0 为跳跃间断点，这时，函数 $f(x)$ 的图像在点 x_0 处产生跳跃.在第二类间断点中，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限至少有一个是无穷大，则称点 x_0 为无穷间断点.

例 1.40 讨论下列函数在指定点处的连续性，若是间断点，指出其类型：

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$，$x=-1$； (2) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $x=1$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x-2}$，$x=2$.

解 (1) 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 在 $x=-1$ 处无定义，所以点 $x=-1$ 是间断点.

因为

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2,$$

所以点 $x=-1$ 是函数的第一类间断点.

如果补充函数的定义，令 $f(x)|_{x=-1}=-2$，则该函数在点 $x=-1$ 处是连续的.因此又称点 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点(图 1-9).

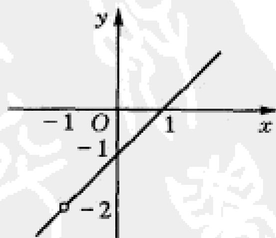


图 1-9

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，故 $f(1-0)$ 和 $f(1+0)$ 都存在，所以点 $x=1$ 是第一类间断点.由于 $f(1$

$-0) \neq f(1+0)$，即$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$不存在，函数 $f(x)$的图像在点 $x=1$ 处产生跳跃(图 1-10)，因此，点 $x=1$ 又称为 $f(x)$的跳跃间断点．

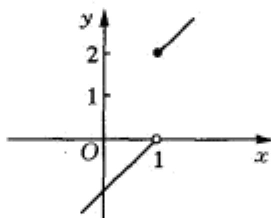


图 1-10

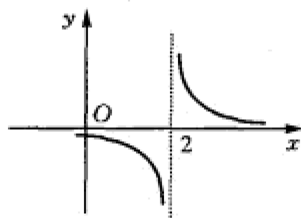


图 1-11

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$因为，因此点 $x=2$ 为无穷间断点(图 1-11)．

二、初等函数的连续性

1．基本初等函数的连续性

基本初等函数有：幂函数 $y=x^{\mu}$($\mu \neq 0$，μ 是实数)，指数函数 $y=a^{x}$($a>0$，$a \neq 1$)，对数函数 $y=\log_a x$($a>0$，$a \neq 1$)，三角函数及反三角函数．

关于三角函数和反三角函数的连续性已在前面讨论过，它们在各自的定义域内连续，可以证明(从略)：指数函数 $y=a^{x}$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$内连续；对数函数 $y=\log_a x$ 在定义域$(0, +\infty)$内连续；幂函数 $y=x^{\mu}$ 在其定义域内连续，总之，基本初等函数在它们的定义域内是连续函数．

2．初等函数的连续性

初等函数是由基本初等函数及常数经过有限次四则运算，或有限次复合步骤构成的．因此，一切初等函数在其定义区间(是指包含在定义域内的区间)内是连续函数．从而初等函数的连续区间就是它们的定义区间．

根据函数 $f(x)$在点 x_0 连续的定义，如果 $f(x)$是初等函数，且 x_0 是$f(x)$定义域内的点，那么求 $f(x)$当 $x \to x_0$ 时的极限，只要求 $f(x)$在点 x_0 的函数值就可以了，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$．

例 1.41　求$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x$．

解　因为点 $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$是初等函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的一个定义区间$(0, \pi)$内的点，所以

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\sin\frac{\pi}{2} = \ln 1 = 0.$$

例 1.42　求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x)$．

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)=\arccos[\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)]$

$$=\arccos\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\arccos\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

三、闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续的函数具有一些重要的性质，下面我们将不加证明予以介绍.

定理 1.11 （最大值与最小值性质） 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.

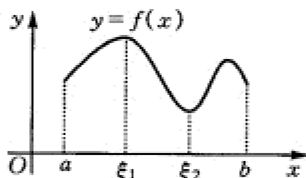


图 1-12

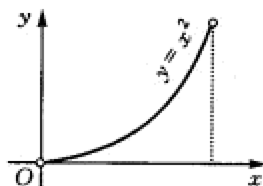


图 1-13

如图 1-12 所示 $f(\xi_1)$，$f(\xi_2)$ 分别称为函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值.

若函数在开区间内连续，则它在该区间内未必能取得最大值和最小值. 如函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, 1)$ 内就无最大值和最小值(如图 1-13).

推论 1 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间上连续，则它在该区间上有界.

定理 1.12 （介值定理） 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，M，m 分别是函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，则对任意 $C\in[m, M]$，至少存在一点 $\xi\in[a, b]$，使 $f(\xi)=C$ (如图 1-14).

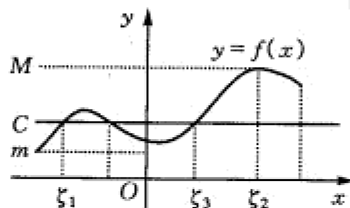


图 1-14

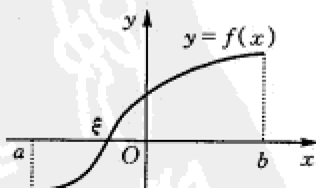


图 1-15

推论 2　若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$（如图 1-15）.

上述推论是求方程的近似解的理论依据.

例 1.43　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

证　设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，它在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，因此由推论可知，至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f(\xi)=0$ 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$.

这表明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

习题 1-6

1. 利用函数连续定义，证明在 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试问 k 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

3. 下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续（说明理由）？

(1) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. 求下列函数的间断点并指出其类型.

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$；　(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+3x+1})$.

6. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

第二章　导数与微分

在高等数学中，导数和微分是一元函数微分学的重要内容. 在这一章里，首先从质点沿直线运动的速度等变化率问题引出导数的概念，然后介绍函数的求导法则及其计算方法，最后由函数增量的近似计算问题，引出函数的微分概念，并简单介绍函数的微分法则及微分的应用.

第一节　导数的概念

我们知道，函数的增量描述了函数的变化，它反映了函数随着自变量的变化而变化所产生的改变量. 但在许多实际问题中，还需要进一步讨论函数相对于自变量的变化而变化的快慢程度，这类问题通常叫做**变化率问题**.

一、变化率问题的举例

1. 变速直线运动的瞬时速度

设一质点按某规律作变速直线运动，若在质点运动的直线上，引入原点、方向和单位长度使其成为数轴，则在质点运动过程中，对于每一个时刻 t，质点的相应位置可以用数轴上的一个坐标 s 来表示，即在 s 与 t 之间存在函数关系 $s = s(t)$，这个函数叫做该质点在上述运动过程中的**位置函数**. 下面讨论质点在任一时刻的速度，即**瞬时速度**.

由物理学知道，当质点作匀速直线运动时，它在任何时刻的速度，可用公式

$$速度=\frac{经过的路程}{所用的时间}$$

来计算. 对于变速直线运动，上式只能反映质点在某段时间内的平均速度，无法精确地得出在运动过程中任一时刻的速度. 为求质点在时刻 t_0 的速度，可以从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度着手.

设质点在 t_0 时刻的位置为 $s(t_0)$，当时间 t 在 t_0 时刻取得增量 Δt 达到 $t_0+\Delta t$ 时刻时，位置函数 $s(t)$ 相应地有增量 $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$(图 2-1). 于是比值

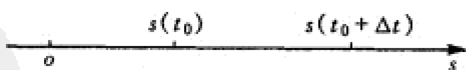


图 2-1

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \tag{2.1}$$

表示质点在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度，记作 $\bar{v}$，即 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

由于变速运动的速度通常是连续变化的，在一段很短的时间 Δt 内，速度变化不大，可以近似地看作是匀速运动. 因此，当 $|\Delta t|$ 很小时，上述平均速度 $\bar{v}$ 可以作为质点在 t_0 时刻的瞬时速度的近似值.

显然，当时间间隔 $|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 就越接近质点在 t_0 时刻的瞬时速度. 因此，当 $\Delta t\to 0$ 时，若式(2.1)的极限存在，则称该极限值为质点在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

2. 非恒定电流的瞬时电流强度

由物理学知道，对于恒定电流来说，单位时间内通过导线横截面的电量叫做**电流强度**(简称**电流**). 设时间 t 从 t_0 变化到 $t_0+\Delta t$ 时，通过导线截面的电量为 ΔQ，则电流强度可用公式

$$\text{电流强度}=\frac{\text{电量}}{\text{时间}}$$

来计算.

对于非恒定电流来讲，电流强度是随时间的变化而变化的. 因此，讨论非恒定电流的瞬时电流强度，可以仿照变速直线运动的瞬时速度问题那样来讨论.

设在导线中有随着时间 t 的变化而变化的电量通过，已知从 $t=0$ 到任一时刻 t 的这段时间内，通过导线横截面的电量为 Q，则电量 Q 是时间 t 的函数：$Q=Q(t)$. 现在来求某时刻 t_0 的瞬时电流速度 $i(t_0)$.

当时间 t 从 t_0 变化到 $t_0+\Delta t$ 时，电量函数的相应增量为

$$\Delta Q=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0).$$

因此，在这段时间内的平均电流强度为

$$\bar{i}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，若式(2.2)的极限存在，则称该极限值为时刻 t_0 的瞬时电流强度，即

$$i(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{i}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}.$$

二、导数的定义

上述两个问题虽然具体内容不同，但所得到的数学模型却是相同的，它们

都可归结为计算函数的增量与自变量的增量之比当自变量的增量趋于零时的极限. 在自然科学和工程技术等领域内, 还有其他许多实际问题具有这样的数学模型. 我们通过数学的抽象, 撇开这些量的具体意义, 抓住它们在数量关系上的共性, 就可引入函数的导数的定义.

定义 2.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在此邻域内)时, 相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

存在, 则称该极限值为**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数**, 记作 $f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.3}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数存在, 亦称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 否则就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导. 如果增量之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (当 $\Delta x\to 0$ 时)的极限为无穷大, 导数是不存在的, 但为叙述方便, 也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

显然, 上述函数增量与自变量增量之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 就是函数在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率, 而导数 $y'|_{x=x_0}$ 是函数在点 x_0 处的变化率, 它反映了函数随自变量的变化而变化的快慢程度.

在式(2.3)中如果令 $x=x_0+\Delta x$, 则 $\Delta x=x-x_0$, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 有 $x\to x_0$, 这时式(2.3)就可改写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{2.4}$$

这是导数定义的另一种形式.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都具有导数, 即在区间 (a, b) 内每一点处都可导, 那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导. 这时, 对于区间 (a, b) 内每一给定的 x, 函数都有一个确定的导数值与之对应, 这样就构成了一个新的函数, 该函数成为原来函数 $y=f(x)$ 的导函数, 记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),$$

即有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

通常，在不至于发生混淆的情况下，导函数 $f'(x)$ 也简称为导数.

根据导数定义，就可以把本节中所讨论的两个实际问题简述如下：

(1) 变速直线运动的瞬时速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即 $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

(2) 非恒定电流的瞬时电流强度 $i(t)$ 是电量函数 $Q(t)$ 对时间 t 的导数，即 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

三、根据定义求导数举例

关于函数的求导问题，我们先根据导数的定义计算一些简单函数的导数，从而推出一些基本求导公式.

根据定义求 $y=f(x)$ 的导数，可分为以下三步：

(1) 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 取极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 2.1　求函数 $f(x)=c$ (c 为常数)的导数

解　(1) 求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$；

(2) 算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$；

(3) 取极限：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$,

即

$$(c)'=0. \tag{2.6}$$

例 2.2　求函数 $f(x)=x^n$　(n 为正整数)的导数.

解　(1)求增量

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^n-x^n\\&=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n-x^n\\&=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n.\end{aligned}$$

(2) 算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}.$$

(3)取极限

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1},$$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{2.7}$$

一般地，对于幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数且$\mu\neq 0$)有

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}. \tag{2.8}$$

这就是**幂函数的导数公式**，这公式的证明将在本章第二节中给出．利用公式(2.8)，可以很方便地求出幂函数的导数．例如：

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2},\cdots\cdots$$

例 2.3 求函数 $y=\sin x$ 的导数

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin(x)$

$$=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

即

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{2.9}$$

类似地可以证明

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{2.10}$$

例 2.4 求对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$的导数

解 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{2.11}$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，得自然对数的导数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{2.12}$$

四、导数的几何意义

为了对“导数是函数(在某点)的变化率”有较直观的认识，可以利用几何图形来说明导数的意义，从而能够用导数来解决一些几何问题.

根据导数的定义：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 先观察增量之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在函数图形上表示什么?

如图 2-2(a)所示，设自变量在点 x 处取得增量 Δx，则相应的函数 $y=f(x)$的增量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 这时，在 $y=f(x)$所表示的曲线上对应有两点 $M(x,\ y)$及 $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$，于是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$就是割线$MN$ 的斜率，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\varphi,$$

其中 φ 是割线MN 的倾角.

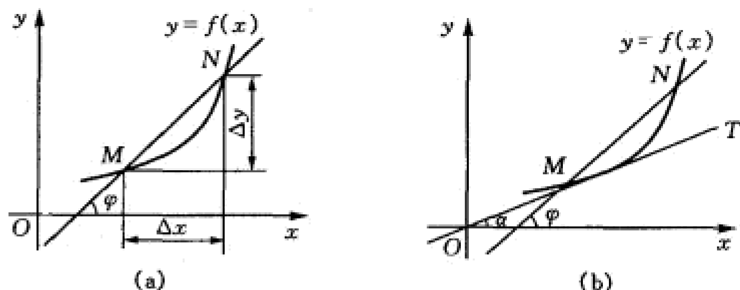


图 2-2

对于上式取极限，当 $\Delta x\to 0$ 时，点 N 就沿曲线$y=f(x)$无限趋近于点 M，而割线 MN 就无限趋近于它的极限位置MT(图 2-2(b))，直线 MT 就定义为曲线$y=f(x)$在点 M 处的切线. 因而切线的倾角 α 是割线的倾角 φ 的极限位置，即 $\varphi\to\alpha$. 相应地，切线的斜率 $\tan\alpha$ 是割线的斜率 $\tan\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，即

$$k=\tan\alpha=\lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

因此，函数 $y=f(x)$在点 x 处的导数$f'(x)$，表示曲线 $y=f(x)$在点 $M(x,\ y)$处的切线的斜率，即

$$f'(x)=\tan\alpha. \tag{2.13}$$

如果函数 $y=f(x)$在点 x 处的导数为无穷大，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,$$

那么，这时曲线 $y=f(x)$在点 $M(x,\ y)$处的切线垂直于 x 轴.

根据导数的几何意义，应用平面解析几何中直线的点斜式方程，可得出曲

线 $y=f(x)$在点 $M(x_0, y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.14}$$

过切点 $M(x_0, y_0)$且与切线垂直的直线称为曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0, y_0)$处的法线. 由于法线的斜率与切线的斜率互为负倒数, 所以当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0, y_0)$处的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \ (f'(x_0)\neq 0). \tag{2.15}$$

例 2.5 求抛物线 $y=x^2$ 在点(2, 4)处的切线的斜率, 并写出切线方程与法线方程.

解 根据导数的几何意义, 所求切线的斜率为

$$k_1=y'|_{x=2}=(x^2)'|_{x=2}=2x|_{x=2}=4,$$

相应的法线斜率为 $k_2=-\frac{1}{4}$, 从而所求的切线方程为

$$y-4=4(x-2),$$

即

$$4x-y-4=0.$$

所求的法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即

$$x+4y-18=0.$$

例 2.6 在曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$上, 求与直线 $y=3x-1$ 平行的切线方程.

解 已知直线 $y=3x-1$ 的斜率为 $k=3$, 根据两直线平行的条件, 所求切线的斜率也等于 3.

根据导数的几何意义, 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$上任一点(x, y)处的切线斜率为

$$k=y'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}\sqrt{x},$$

所以, 要使曲线的切线平行于已知直线, 必须有$\frac{3}{2}\sqrt{x}=3$, 解得 $x=4$.

将 $x=4$ 代入所给的曲线方程 $y=x^{\frac{3}{2}}$, 得 $y=8$, 从而得到曲线上一点 $M(4, 8)$, 于是过曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$上点 $M(4, 8)$处的切线与直线 $y=3x-1$ 平行, 其切线方程为

$$y-8=3(x-4),$$

即

$$y=3x-4.$$

五、函数的可导性与连续性的关系

定理 2.1 若函数 $y=f(x)$在点 x 处可导, 则函数在该点处必连续.

证　已知函数 $y=f(x)$在点 x 处可导，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，由具有极限的函数与无穷小的关系可知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中，α 为当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小. 上式两边同乘以 Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

由此可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $\Delta y\to 0$. 这就表明函数 $y=f(x)$在点 x 处是连续的. 证毕.

该定理表明了函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件，即函数在某点连续却不一定在该点处可导.

例 2.7　函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$在点 $x=0$ 处连续(图 2-3)，但不可导.

解　这是因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=f(x)$，即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以，函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

而在 $x=0$ 处，有

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=\infty,$$

即导数不存在. 函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$的图形在原点 $O(0,0)$处的切线垂直于 x 轴，切线的斜率为无穷大.

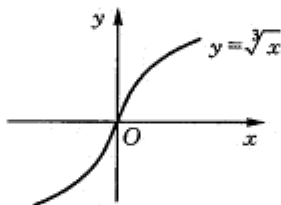


图 2-3

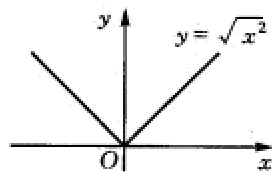


图 2-4

例 2.8　函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2}$(即 $y=f(x)=|x|$)在点 $x=0$ 处连续(图 2-4)，但不可导.

解　这是因为在 $x=0$ 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2}-\sqrt{0^2}}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$；

左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

可见，左、右极限存在但不相等，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，即导数 $f'(0)$ 不存在. 这在图形上表现为曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在点处没有切线(图 2-4).

在例 2.8 中涉及到当 $\Delta x\to 0$ 时 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的左、右极限，在此我们引进左导数和右导数的概念. 由于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导是指极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，而极限存在的充分必要条件是左、右极限存在且相等. 因此，$f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

及右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称作函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

综上所述，可得结论：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

依据上述结论可知，在例 2.8 中就是函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=-1$，而右导数 $f'_+(0)=1$，$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故该函数在点 $x=0$ 处不可导.

例 2.9　设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\leqslant 2,\\ x^2+b, & x>2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处可导，求 a 与 b 的值.

解　由题设知 $f'(2)$ 存在，则有 $f'_-(2)=f'_+(2)$，
因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

由
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+1)=2a+1,$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+b)=4+b,$$

所以
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x),$$

即
$$2a+1=4+b,\ a=\frac{3+b}{2}.$$

由 $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{(ax+1)-(2a+1)}{x-2}=a$；

$$\begin{aligned}f'_+(2)&=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x^2+b)-(2a+1)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2^+}\frac{(x^2+b)-(4+b)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2^+}(x+1)=4.\end{aligned}$$

因为函数 $f(x)$在 $x=2$ 处可导，$f'_-(2)=f'_+(2)$，

所以
$$a=4.$$

将 $a=4$ 代入，得 $b=5$.

习题 2-1

1. 物体作直线运动的方程为 $s=t^2+3$，求：

(1) 物体在 2 秒到 $2+\Delta t$ 秒这段时间的平均速度；

(2) 物体在 2 秒末的瞬时速度；

(3) 物体在 t_0 秒到 $t_0+\Delta t$ 秒这段时间的平均速度；

(4) 物体在 t_0 秒末的瞬时速度.

2. 用导数的定义求下列函数的导数：

(1) $f(x)=ax+b$，其中 a，b 都是常数；

(2) $f(x)=\sqrt{x}$，在 $x=2$ 处；

(3) $f(x)=\frac{1}{x^3}$；

(4) $f(x)=\cos x$.

3. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$存在，根据导数的定义求下列极限值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}$，其中 a，b 都是常数.

4. 利用导数公式求下列函数的导数：

(1) $y=x^2$；　(2) $y=\sqrt[4]{x^3}$；　(3) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$；　(4) $y=x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}$；

(5) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3\sqrt{x}}$；　(6) $y=\log_3 x$；　(7) $y=\lg x$.

5. 求曲线 $y=\ln x$ 在点 $M(e,1)$ 处的切线方程和法线方程.

6. 曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上哪一点的切线平行于直线 $3x-y+1=0$.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

第二节 初等函数的导数

前面根据导数的定义，计算了一些简单函数的导数. 但是，对于比较复杂的函数，根据定义求导数将是很困难的. 从本节起，将介绍一些求导的运算法则，借助于这些法则，就能比较方便地求出常见的函数——初等函数的导数.

一、函数的四则运算求导法则

定理 2.2 设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的代数和、差、积、商(分母不为零)在 x 处仍可导，且

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; (2.16)

(2) $(uv)'=u'v+u'v$，特别地 $(cu)'=cu'$(c 为常数); (2.17)

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. (2.18)

下面我们只证明法则(2)，(1)(3)的证明从略.

证 设 $y=u(x)v(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\ &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\ &= [u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\ &= \Delta u v(x+\Delta x)+u(x)\Delta v.\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

因为函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x);\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x).$$

又因 $v(x)$ 在点 x 处连续，故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x).$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\ &=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

从而有　$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

上述法则(1)可以推广到有限个可导函数的情形，即

$$(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)' = u'_1 \pm u'_2 \pm \cdots \pm u'_n.$$

法则(2)也可以推广到有限个可导函数积的情形，即

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

例 2.10　设 $y = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} + \sin x - \ln 2$，求 y'.

解　$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{x})' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sin x)' - (\ln 2)' \\ &= (x^{\frac{1}{3}})' - (x^{-1})' + (\sin x)' - (\ln 2)' \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-2} + \cos x - 0 \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2} + \cos x. \end{aligned}$$

例 2.11　设 $y = \sqrt{x}\cos x$，求 y'.

解　$y' = (\sqrt{x}\cos x)' = (\sqrt{x})'\cos x + \sqrt{x}(\cos x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\sin x.$

例 2.12　$f(x) = x^2(\ln x)\sin x$，求 $f'(x)$.

解　$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2(\ln x)\sin x]' \\ &= (x^2)'(\ln x)\sin x + x^2(\ln x)'\sin x + x^2(\ln x)(\sin x)' \\ &= 2x(\ln x)\sin x + x^2\frac{1}{x}\sin x + x^2(\ln x)\cos x \\ &= 2x(\ln x)\sin x + x\sin x + x^2(\ln x)\cos x. \end{aligned}$$

例 2.13　设 $y = 2x^2 - \frac{1}{2x} + \sin\frac{\pi}{4}$，求 y' 及 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解　$y' = (2x^2)' - \left(\frac{1}{2x}\right)' + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)' = 4x + \frac{1}{2x^2}$，

由此可得 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 4 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 2\pi + \frac{2}{\pi^2}.$

例 2.14　设 $y = \tan x$，求 y'.

解　$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

从而可得到正切函数的导数公式：

$$(\tan x)' = \sec^2 x. \tag{2.19}$$

用同样的方法可推出余切函数的导数公式：

$$(\cot x)' = -\csc^2 x. \tag{2.20}$$

例 2.15 设 $y=\sec x$，求 y'.

解 $y' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{(1)'\cos x - 1\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x.$

从而得到正割函数的导数公式：

$$(\sec x)' = \sec x\tan x. \tag{2.21}$$

用同样的方法可推出余割函数的导数公式：

$$(\csc x)' = -\csc x\cot x. \tag{2.22}$$

例 2.16 设 $f(x) = \dfrac{\tan x\sec x}{1+x}$，求 $f'(0)$.

解 $f'(x) = \dfrac{(\tan x\sec x)'(1+x) - \tan x\sec x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}$

$$= \frac{(\sec^2 x\sec x + \tan x\sec x\tan x)(1+x) - \tan x\sec x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\sec x[(\sec^2 x + \tan^2 x)(1+x) - \tan x]}{(1+x)^2},$$

$$f'(0) = \frac{\sec x[(\sec^2 x + \tan^2 x)(1+x) - \tan x]}{(1+x)^2}\bigg|_{x=0} = 1.$$

二、反函数的导数

前面已经得到了常数、幂函数、三角函数及对数函数的导数公式．下面要推导指数函数和反三角函数的导数公式．由于指数函数和反三角函数分别是对数函数和三角函数的反函数，所以先给出反函数的求导法则．

1．反函数的求导法则

定理 2.3 设直接函数 $y=f(x)$在某区间内单调连续，在该区间内任一点 x 处具有导数，且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\phi(y)$在对应点 y 处也有导数，且有

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)}\quad(f'(x)\neq 0). \tag{2.23}$$

证 由于函数 $y=f(x)$在给定的区间内单调连续，因此，它的反函数 $x=\phi(y)$在对应的区间内也是单调连续的．故当 y 有增量 $\Delta y(\Delta y\neq 0)$时，相应地 x 有增量 $\Delta x = \phi(y+\Delta y) - \phi(y)$，且 $\Delta x\neq 0$．因而有

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

由于 $x=\phi(y)$连续，所以，当 $\Delta y\to 0$ 时，也一定有 $\Delta x\to 0$．又由于 $y=f(x)$在 x 处可导，且 $f'(x)\neq 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$.

于是
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)},$$

即证得
$$\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}(f'(x)\neq 0).$$

下面用公式(2.23)来推导指数函数和反三角函数的导数公式.

2. 指数函数的导数

为了使推导的结果与通常使用的函数的记号相一致，现选取直接函数的自变量为 y，因变量为 x，这样公式(2.23)就改写成

$$\phi'(x)=\frac{1}{f'(y)}(f'(y)\neq 0). \tag{2.23'}$$

现在应用公式(2.23′)来推导指数函数的导数公式.

设对数函数 $x=\log_a y(a>0,\ a\neq 1)$是直接函数，则指数函数 $y=a^x$ 是它的反函数. 通常，对数函数 $x=\log_a y$ 在区间 $0<y<+\infty$内单调可导，其导数为

$$(\log_a y)'=\left(\frac{\ln y}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\ln a}.$$

根据公式(2.23′)在对应区间 $0<x<+\infty$(对数函数的值域)内，所求的指数函数 $y=a^x$ 的导数为

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a,$$

将 $y=a^x$ 代入上式右端，得

$$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,\ a\neq 1). \tag{2.24}$$

当 $a=\mathrm{e}$ 时，公式(2.24)成为

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x. \tag{2.25}$$

例 2.17　设 $y=a^x\cdot x^a$，求 y'.

解　$y'=(a^x)'x^a+a^x(x^a)'=a^x\ln a\cdot x^a+a^xax^{a-1}=a^x(x^a\ln a+ax^{a-1})$.

3. 反三角函数的导数

(1) 反正弦函数和反余弦函数的导数

设 $x=\sin y$ 为直接函数，则 $y=\arcsin x$ 是它的反函数. 因为函数 $x=\sin y$ 在区间 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$内单调可导，且直接函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y>0\quad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right),$$

根据公式(2.23′)，在对应区间 $-1<x<1$ 内有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\arcsin x)'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中，$\cos y=\sqrt{1-x^2}$根式前取正号是因为当$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$时，$\cos y>0$.

从而可得到反正弦函数的导数公式：

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.26}$$

用类似的方法可得反余弦函数的导数公式：

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.27}$$

(2) 反正切函数和反余切函数的导数

设 $x=\tan y$ 为直接函数，则 $y=\arctan x$ 是它的反函数. 因为函数 $x=\tan y$ 在区间$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$内单调可导，且直接函数的导数为

$$\frac{dx}{dy}=(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right),$$

根据式(2.23′)，在对应区间$-1<x<1$内有

$$\frac{dy}{dx}=(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

从而可得到反正切函数的导数公式：

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.28}$$

用类似的方法可得反余切函数的导数公式：

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.29}$$

例 2.18 设 $y=e^x\arctan x+2\arccos x$，求 y'.

解
$$\begin{aligned}y'&=(e^x\arctan x+2\arccos x)'=(e^x\arctan x)'+(2\arccos x)'\\&=e^x\arctan x+e^x\frac{1}{1+x^2}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\&=e^x\left(\arctan x+\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

三、复合函数的求导法则

到目前为止，我们已经掌握了基本初等函数的导数公式及函数的四则运算的求导法则. 但对于一般的初等函数的求导，还需要解决复合函数的求导问题.

例如，要求函数 $y=\sin 2x$ 的导数，就不能用导数公式$(\sin x)'=\cos x$ 来计算而得出$(\sin 2x)'=\cos 2x$. 事实上，利用函数乘积的求导法则，得到

$$\begin{aligned}(\sin 2x)'&=(2\sin x\cos x)'=2(\sin x\cos x)'\\&=2[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)']\end{aligned}$$

$$=2[\cos^2x-\sin^2x]=2\cos2x\neq\cos2x.$$

这里，我们应注意到，$y=\sin2x$ 是由 $y=\sin u$，$u=2x$ 复合而成的复合函数. 下面就来推导复合函数的求导法则.

定理 2.4 （连锁法则） 如果函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，$y=f(u)$在对应点 $u=\varphi(x)$处也可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处也可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2.30}$$

上式也可写成

$$y'_x=y'_u u'_x \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\varphi'(x). \tag{2.30′}$$

式中的 y'_x 表示 y 对 x 的导数，y'_u 表示 y 对中间变量 u 的导数，而 u'_x 表示中间变量 u 对自变量 x 的导数.

证 当自变量 x 有增量 Δx 时，相应地函数 u 有增量 Δu，从而函数 y 也有增量 Δy. 由于函数 $y=f(u)$在点 u 处可导，因此，极限 $\lim\limits_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}$存在，于是根据具有极限的函数与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}+\alpha,$$

其中，α 是当 $\Delta u\to0$ 时的无穷小. 上式两端同乘以 $\Delta u(\Delta u\neq0)$，得

$$\Delta y=\frac{dy}{du}\Delta u+\alpha\Delta u, \tag{2.31}$$

两端同除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to0$，上式两端取极限，得

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

已知函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$；又 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导必连续，于是当 $\Delta x\to0$ 时，有 $\Delta u\to0$. 故有

$$\lim_{\Delta x\to0}\alpha=\lim_{\Delta u\to0}\alpha=0.$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=\frac{dy}{du}\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\alpha\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}+0=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

前面讲过函数 $y=\sin2x$ 是由函数 $y=\sin u$，$u=2x$ 复合而成的复合函数，现应用公式(2.30)，可得

$$(\sin2x)'=(\sin u)'_u\cdot(2x)'=\cos u\times2=2\cos2x.$$

利用复合函数的求导法则时，关键是把所给的复合函数分解成若干个简单函数(一般为基本初等函数或基本初等函数的四则运算)的复合，而这些简单函数的导数都已会求，然后再像“剥笋”那样，由外层到里层，层层求导后相乘.

例 2.19　设 $y=\sin\sqrt{x}$，求 y'.

解　$y=\sin\sqrt{x}$是由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{x}$复合而成的复合函数，利用复合函数的求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'_u(\sqrt{x})'_x=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

注　*用复合函数的求导法则得出的结果，必须把引进的中间变量回代成原来自变量的式子.*

例 2.20　设 $y=\ln\tan x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$y=\ln\tan x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\tan x$ 复合而成的复合函数，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\ln u)'_u(\tan x)'_x=\frac{1}{u}\sec^2x=\cot x\sec^2x.$$

例 2.21　设 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　把 $y=\sqrt{a^2-x^2}$分解成 $y=\sqrt{u}$和 $u=a^2-x^2$，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\sqrt{u})'_u\cdot(a^2-x^2)'_x=\frac{1}{2\sqrt{u}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

应当注意，用复合函数求导的连锁法则时，函数应当先对中间变量求导，然后乘以中间变量对自变量求导．当对复合函数的分解比较熟练后，可以不必写出中间变量，而采用下面例题的运算方式，从外到里层层求导.

例 2.22　设 $y=\ln(1+x^2)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=\frac{2x}{1+x^2}$.

在计算过程中，实际上把 $1+x^2$ 看作中间变量 u.

例 2.23　设 $y=\sqrt[3]{\sin x+\cos x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=(\sqrt[3]{\sin x+\cos x})'=\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)^{-\frac{2}{3}}(\sin x+\cos x)'\\&=\frac{1}{3\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)^2}}(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

在计算过程中，把 $\sin x+\cos x$ 视为中间变量.

复合函数的求导法则，可以推广到多个中间变量的情形. 下面给出两个中间变量情形的复合函数的求导公式.

设复合函数 $y=f(\varphi(\varphi(x)))$，其分解式为 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\varphi(x)$，则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

上式也可写成

$$y'_x=y'_u u'_v v'_x \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\varphi'(v)\Psi'(x).$$

这里，假定上式右端所出现的导数在相应点处都存在.

例 2.24　设 $y=\sqrt{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　$y=\sqrt{\sin\frac{1}{x}}$ 可以分解成 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$，这里 u，v 是两个中间变量. 利用上述复合函数的求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=(\sqrt{u})'(\sin v)'\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\cos\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}.$$

若不写出中间变量，则也可直接求导如下：

$$\frac{dy}{dx}=\left(\sqrt{\sin\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\cos\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\cos\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{\cos\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}.$$

例 2.25　设 $y=\cos\sqrt{1+\ln x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　$$\frac{dy}{dx}=-\sin\sqrt{1+\ln x}(\sqrt{1+\ln x})'$$

$$=-\sin\sqrt{1+\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}(1+\ln x)'$$

$$=-\sin\sqrt{1+\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{\sin\sqrt{1+\ln x}}{2x\sqrt{1+\ln x}}.$$

如果求导计算熟练后，还可省略演算步骤，直接写出层层求导的结果. 例如

$$(\cos\sqrt{1+\ln x})'=-\sin\sqrt{1+\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}.$$

例 2.26 设 $y=\ln\sec\dfrac{1}{a^2+x^2}$，求 y'.

解
$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{\sec\frac{1}{a^2+x^2}}\left(\sec\frac{1}{a^2+x^2}\right)'\\&=\cos\frac{1}{a^2+x^2}\sec\frac{1}{a^2+x^2}\tan\frac{1}{a^2+x^2}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)'\\&=\tan\frac{1}{a^2+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{(a^2+x^2)^2}\right)(a^2+x^2)'\\&=-\tan\frac{1}{a^2+x^2}\cdot\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\\&=-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\tan\frac{1}{a^2+x^2}.\end{aligned}$$

也可以直接写出层层求导的结果：

$$\begin{aligned}y'&=\cos\frac{1}{a^2+x^2}\sec\frac{1}{a^2+x^2}\tan\frac{1}{a^2+x^2}\left[-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\right]\\&=-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\tan\frac{1}{a^2+x^2}.\end{aligned}$$

例 2.27 设 $y=xf(a^{\sqrt{x}})$，其中函数 $f(u)$ 可导，求 y'.

解 先用函数乘积的求导法则；当求函数 $f(a^{\sqrt{x}})$ 的导数时，再利用复合函数的求导法则. 于是得

$$\begin{aligned}y'&=f(a^{\sqrt{x}})+xf'(a^{\sqrt{x}})\cdot(a^{\sqrt{x}})'=f(a^{\sqrt{x}})+xf'(a^{\sqrt{x}})\cdot a^{\sqrt{x}}\ln a\cdot(\sqrt{x})'\\&=f(a^{\sqrt{x}})+xf'(a^{\sqrt{x}})\cdot a^{\sqrt{x}}\ln a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(a^{\sqrt{x}})+\frac{\sqrt{x}}{2}f'(a^{\sqrt{x}})\cdot a^{\sqrt{x}}\ln a.\end{aligned}$$

例 2.28 设 $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'.

解
$$\begin{aligned}y'&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

例 2.29 设 $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$，求 y'.

解　$y'=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)'+\dfrac{1}{3}[\ln(1+\cos x)-\ln\sin x]'$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}+\frac{1}{3}\left[\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}-\frac{1}{3}\frac{\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{3}\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{3}\csc x.$$

最后，我们利用复合函数的求导法则及指数函数的导数公式，就 $x>0$ 的情形来证明一般情况下的幂函数的求导公式：

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}(\mu\text{ 为实数}).$$

因为
$$x^\mu=\mathrm{e}^{\ln x^\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x},$$

所以
$$(x^\mu)'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}(\mu\ln x)'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\frac{\mu}{x}=x^\mu\cdot\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

熟记基本初等函数的导数公式，熟练掌握求导运算法则，对于求初等函数的导数是非常重要的．为了便于查询，现将前面所推导出的导数公式和求导法则归纳如下：

1．基本求导公式

(1) $(c)'=0$；　(2) $(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}(\mu\text{ 为实数},\mu\neq0)$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；　(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(9) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,\ a\neq1)$；　(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2．函数的四则运算的求导法则

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$均可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

(2) $(uv)'=u'v+uv'$，特别地$(cu)'=cu'$（c 为常数）；

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0)$.

3. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$均可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\varphi'(x).$$

习题 2-2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=3x^5-2x+3$;

(2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}$;

(3) $y=(x+2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3\right)$;

(4) $y=(x^2+3x+5)\sin x$;

(5) $y=\dfrac{5^x}{2^x}$;

(6) $y=5^x2^{3x}$;

(7) $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$;

(8) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(9) $y=x^3\mathrm{e}^x\sin x$;

(10) $y=\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$.

2. 求函数在所给点处的导数.

(1) 设 $y=\sin x\cos x$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) 设 $y=t\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t$，求$'|_{t=\frac{\pi}{4}}$;

(3) 设 $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$，$f'(2)$;

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$，求 $f'(4)$.

3. 求下列复合函数的导数.

(1) $y=(3x^2+5x+6)^{20}$;

(2) $y=\sin^3(Kx+b)$;

(3) $y=\mathrm{e}^{x^3}$;

(4) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$;

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

(6) $y=\tan\ln(2x+1)$;

(7) $y=\ln^{10}(x^4+3x^2+5)$;

(8) $y=a^x\cos(3x-2)$;

(9) $y=3^{\sin\frac{1}{x}}$;

(10) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(11) $y=\arccos(a^x)$;

(12) $y=\arcsin(\ln x)$;

(13) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(14) $y=\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$;

(15) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

(16) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(17) $y=a^{\arctan\sqrt{x}}$;

(18) $y=2^{\arctan x}+\arctan(2^x)$;

(19) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$;

(20) $y=\sin3x\cos2x$;

(21) $y=\frac{1}{x}\left(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}\right)$;

(22) $y=\ln\cot x$;

(23) $y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

(24) $y=\log_3(x^3-\cos x)$;

(25) $y=\cos\ln x^2$;

(26) $y=\frac{1}{2}\tan^2x+\ln\cos x$;

(27) $y=e^{\sqrt{1-\cos x}}$;

(28) $y=7^{3x^2+2x+3}$;

(29) $y=3^{\frac{x}{\ln x}}$;

(30) $y=\arccos\frac{a}{x}$;

(31) $y=\arcsin(\sin x)$;

(32) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}$;

(33) $y=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$;

(34) $y=e^x\ln\sin x$;

(35) $y=x^2\arcsin2^x$;

(36) $y=\sin5x+\sin^5x+\sin x^5$.

4. 求下列函数在给定点处的导数.

(1) 设 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$，求 $y'|_{x=0}$;

(2) 设 $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$，求 $y'|_{t=4}$;

(3) 设 $f(x)=\cot^3\sqrt{1+x^2}$，求 $f'(0)$;

(4) 设 $f(x)=\ln[(x^3+3)(x^3+1]$，求 $f'(1)$.

第三节　高阶导数

我们已经知道，变速直线运动的速度 $v(t)$是位置函数 $s(t)$对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\quad 或\quad v=s'(t).$$

而加速度 a 又是速度函数 $v(t)$对时间 t 的导数，即

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\quad 或\quad a=[s'(t)]'.$$

这种导数的导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$或$[s'(t)]'$叫做$s$ 对t 的二阶导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\quad 或\quad s''(t).$$

所以，变速直线运动的加速度 a 就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 如果函数 $f'(x)$ 的导数存在，那么称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作 $f''(x)$，y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$f''(x)=(f'(x))',\quad y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**一阶导数**.

类似地，如果函数 $y''=f''(x)$ 的导数存在，那么这个导数称为原来函数 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，记作 $y'''=f'''(x)$. 一般地，$(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ 的导数存在，这个导数称为原来函数 $y=f(x)$ 的 ***n* 阶导数**. 自二阶及二阶以上的导数分别记作

$$y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数的二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**. 事实上，求函数的高阶导数就是应用前面学过的方法，逐次地求出所需阶数的导数.

例 2.30 设 $s=A\sin(\omega t+\varphi)$，求 $\frac{d^2s}{dt^2}$.

解 $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$，$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$.

例 2.31 求下列指数函数的 n 阶导数：

(1) $y=e^{rx}$； (2) $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$.

解 (1) $y=e^{rx}$，$y'=re^{rx}$，$y''=r^2e^{rx}$，…，一般地，可得

$$y^{(n)}=(e^{rx})^{(n)}=r^ne^{rx}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

(2) $y=a^x$，

$y'=(a^x)'=a^x\ln a$，

$y''=(a^x\ln a)'=a^x(\ln a)^2$，

$y'''=[a^x(\ln a)^2]=a^x(\ln a)^3$，

…

一般地，可得 $y^{(n)}=(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$.

例 2.32 求对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y=\ln(1+x)$，

$y'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)(1+x)^{-2},$$
$$y''' = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!\ (1+x)^{-3},$$
$$y^{(4)} = (-1)^2(-3)2!\ (1+x)^{-4} = (-1)^3 3!\ (1+x)^{-4},$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ (1+x)^{-n},$$

即

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

我们规定 $0!=1$，所以，上述结果当 $n=1$ 时成立.

注　求函数的 n 阶导数的关键是找出各阶导数的规律，一般不要先对各阶导数的系数进行化简运算，以便找出系数的规律.

例 2.33　求正弦函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解　$y=\sin x$,

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = \cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

从而得到函数 $\sin x$ 的 n 阶导数公式：

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.32}$$

用类似的方法可得余弦函数的 n 阶导数公式：

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.33}$$

例 2.34　求幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是任何实数）的 n 阶导数.

解　$y' = (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$,

$$y'' = (\mu x^{\mu-1})' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y''' = [\mu(\mu-1)x^{\mu-2}]' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$
$$\cdots$$

一般地，可得

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

特别地，当 $\mu=k$ 为正整数时，可得到以下结论：

$$(x^k)^{(n)}=\begin{cases}k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & k>n,\\ n!, & k=n,\\ 0, & k<n.\end{cases}$$

例 2.35　设 $y=\dfrac{1}{x^2+x}$，求 $y^{(n)}$.

解　若将 y 对 x 连续求导 n 次，则较难归纳出 $y^{(n)}$ 的一般规律. 因此，先将 y 的表达式恒等变形为 $y=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$，则

$$y'=-\frac{1}{x^2}-\left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right],$$

$$y''=(-1)(-2)\frac{1}{x^3}-(-1)(-2)\frac{1}{(x+1)^3}=(-1)^2\cdot 2!\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right],$$

$$y'''=(-1)^2\cdot 2!\left[(-3)\frac{1}{x^4}-(-3)\frac{1}{(x+1)^4}\right]$$

$$=(-1)^3\cdot 3!\left[\frac{1}{x^4}-\frac{1}{(x+1)^4}\right],$$

$$\cdots$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]\quad(n=1,2,\cdots).$$

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；　(2) $y=e^{2x-1}$；　(3) $y=x\cos x$；

(4) $y=e^{-t}\sin t$；　(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　(6) $y=\dfrac{2x^3+\sqrt{x}+4}{x}$；

(7) $y=\ln(1-x^2)$；　(8) $y=\tan x$；　(9) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(10) $y=(1+x^2)\arctan x$；　(11) $y=\cos^2 x\ln x$；　(12) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

(13) $y=xe^{x^2}$；　(14) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，求 $f'''(2)$.

3. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式：$y''-2y'+2y=0$.

4. 验证函数 $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ 满足关系式：$xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0$.

5. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($a_1$, a_2, $\cdots$, a_n 都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(4) $y=\sqrt[m]{1+x}$;

(5) $y=x\ln x$;

(6) $y=xe^x$.

第四节　隐函数的导数及参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

以前我们所遇到的函数，大多数可用公式法表示成 $y=f(x)$的形式，这样的函数称为**显函数**.

在通常的情况下，一个含有 x 与 y 的二元方程也可能确定 y 是 x 的函数，例如，在方程 $x^5+4xy^3-3y^5-2=0$ 中，当 x 在$(-\infty, +\infty)$内任取一个值时，相应地就有一个满足此方程的 y 值与之对应，故这个方程确定了 y 是 x 的函数.

一般说来，如果在 x, y 的二元方程中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足该方程的一个 y 值与之对应，那么就说该方程确定了 y 是 x 的函数. 这样的函数称为**隐函数**.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 例如，从方程 $x^3+y^3-1=0$ 中可以解出 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$，又例如，方程 $x^5+4xy^3-3y^5-2=0$，却无法把 y 表示成 x 的算式. 由此可见，隐函数的显化有时是很困难的，甚至是不可能的.

我们希望有一种办法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数. 下面我们通过具体例子来说明这种方法.

例 2.36　求由方程 $3x^2+xy-5y+1=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　把方程两边分别对 x 求导数，在方程的左边求导时，要注意 y 是 x 的函数，则有

$$6x+y+x\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}=0,$$

从中解出$\frac{dy}{dx}$得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x+y}{5-x}.$$

例 2.37　求由方程 $e^y+xy=e$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　把方程两边分别对 x 求导得

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

由此得到

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}.$$

将上式两边分别对 x 求导，并应用商的求导法则及复合函数的求导法则，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{dy}{dx}(x+e^y)-y\left(1+e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x+e^y)^2},$$

将$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}$代入上式右端，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{-\frac{y}{x+e^y}(x+e^y)-y\left(1-e^y\frac{y}{x+e^y}\right)}{(x+e^y)^2}=\frac{2xy+2ye^y-y^2e^y}{(x+e^y)^3},$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2xy+2ye^y-y^2e^y}{(x+e^y)^3}.$$

二、对数求导法

对函数先取自然对数(假设对数有意义)，通过对数运算法则化简后，再利用隐函数求导法则求出函数的导数，这种求导方法称为对数求导法．它在某些情况下可使求导运算变得简便些．下面通过具体例子来说明．

例 2.38　设 $y=x^{\sin x}$(其中，$x>0$)，求 y'.

解　首先注意到，函数 $y=x^{\sin x}$即不是幂函数，也不是指数函数，称作为幂指函数．为了求这函数的导数，先在方程两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x,$$

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x},$$

解出 y'，得

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

幂指函数的一般形式为 $y=(u(x))^{v(x)}$(其中，$u(x)>0$). 若函数 $u(x)$和 $v(x)$都具有导数，则可利用对数求导法仿照例 2.38 来求导.

对数求导法对于由乘、除、开方构成的函数也是适用的，可简化求导运算.

例 2.39　设 $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)^2}}$，求 y'.

解　先在两边取对数，得

$$\ln y=\ln x+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x-2)-\frac{2}{3}\ln(x-3),$$

然后上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x-3)},$$

解出 y'，得

$$\begin{aligned}y'&=y\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x-3)}\right]\\&=x\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)^2}}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x-3)}\right].\end{aligned}$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

一般地，参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\Psi(t)\end{cases}\tag{2.34}$$

可以确定 y 是 x 的函数，就称作为由参数方程所确定的函数.

在实际问题中，需要计算由参数方程所确定的函数的导数，并希望不消去参数 t 直接由参数方程来计算. 下面我们就来推导由参数方程所确定的函数的求导公式.

在式(2.34)中，如果 $x=\varphi(t)$与 $y=\Psi(t)$都具有导数，且 $\varphi'(t)\neq0$，$x=\varphi(t)$具有单调连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则 y 是 x 的复合函数，即

$$y=\Psi(t),\ t=\varphi^{-1}(x)\quad 或\quad y=\Psi[\varphi^{-1}(x)],$$

由复合函数的求导法则与反函数的求导公式，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}.\tag{2.35}$$

式(2.35)就是由参数方程(2.34)所确定的函数 y 对 x 的导数公式.

在上述条件下，如果 $x=\varphi(t)$，$y=\Psi(t)$，还具有二阶导数，则有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{2.36}$$

例 2.40 求已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

求椭圆在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处所对应点的切线的斜率.

解 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标是

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$b_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

则曲线在点 M_0 处的斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

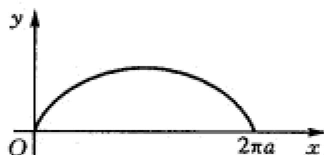


图 2-5

例 2.41 计算由摆线(图 2-5)的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

所确定的函数的二阶导数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，($t\neq 2k\pi$，$k$ 为整数).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}$$

$$=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}\quad(t\neq 2k\pi,\ k\text{ 为整数}).$$

习题 2-4

1．求下列方程所确定的隐函数的导数.

(1) $y^2-2xy+9=0$;　(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$;　(4) $y=1-xe^y$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\ \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=\sin(x+y)$;　　(2) $y=1+xe^y$;

(3) $y=\tan(x+y)$;　　(4) $x^2-y^2=1$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;　　(2) $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$;

(3) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;　　(4) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

5. 求由下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta), \\ y=\theta\cos\theta. \end{cases}$

6. 已知 $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

7. 写出下列曲线在给定点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t, \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;　　(2) $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t}, \end{cases}$ 在 $t=0$ 处;

(3) $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^2}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

8. 求由下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}, \\ y=1-t; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=2e^t. \end{cases}$

第五节　函数的微分

一、微分的定义

在本章第一节中我们知道，函数的导数是表示函数相对于自变量变化的快慢程度(变化率). 在工程技术领域，还会遇到与导数密切相关的另一类问题：在运动或变化的过程中，当自变量有一个微小的增量时，要计算相应的函数的

增量.

下面先来分析一个具体的例子，从而引进函数微分的概念.

引例 一块正方形的金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时(如图 2-6)，薄片的面积改变了多少?

解 设正方形的边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2$. 薄片受温度变化的影响时，面积的改变量可以看作是当自变量 x 在x_0 处取得增量 Δx 时，函数 y 相应的改变量 Δy. 即

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2. \tag{2.37}$$

从上式可以看出，Δy 可分成两部分：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，而第二部分$(\Delta x)^2$，在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积. 显然，$2x_0\Delta x$ 是面积增量的主要部分，而$(\Delta x)^2$ 是次要部分. 当$|\Delta x|$很小时，$(\Delta x)^2$ 在 Δy 中所起的作用很微小，面积增量 Δy 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 来表示，即

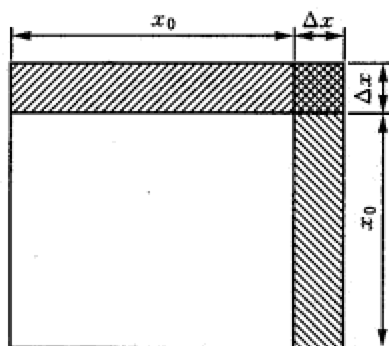


图 2-6

$$\Delta y\approx 2x_0\Delta x.$$

一般地，计算函数的增量是比较复杂的，希望能像引例中那样，找出自变量增量的线性式来近似表达函数的增量，且又具有一定的精确度. 这就是说，如果函数 $y=f(x)$的增量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的常数，$o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小，那么，当 $A\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，便有函数增量的近似表达式 $\Delta y\approx A\cdot\Delta x$. 下面我们来引入函数微分的概念.

定义 2.2 设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 均在这区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{2.38}$$

其中，A 是与 Δx 无关，只与 x_0 有关的常数，$o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 称为函数$y=f(x)$在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x. \tag{2.39}$$

例 2.42 求当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时，函数 $y=x^3$ 增量的近似值.

解 函数的增量 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$. 由于 $\Delta x=0.01$，即$|\Delta x|$比较小，所求函数增量的近似值可用函数当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 的微分来近似代替，即

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}\approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=3\times 2^2\times 0.01=0.12.$$

二、函数可微与可导之间的关系

定理1.5　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是该函数在点 x_0 处可导.

证　必要性　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，根据微分的定义，有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

上式两边同除以 Δx ($\Delta x\neq 0$)，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，上式取极限就得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$$

即

$$A=f'(x_0).$$

因此，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处也一定可导(即 $f'(x_0)$ 存在)，且 $A=f'(x_0)$.

充分性　$y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

根据极限与无穷小的关系，上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中，α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小．因此有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x. \tag{2.38'}$$

这里由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\alpha$，所以 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$．又 $f'(x_0)$ 与 Δx 无关，于是式(2.38′)相当于微分定义中的式(2.38)，且 $f'(x_0)=A$，故函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微．证毕.

定理1.5表明，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是该函数在点 x_0 处可导．从定理的证明中可知，当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分就是

$$dy=f'(x_0)\Delta x. \tag{2.39'}$$

函数 $y=f(x)$ 在点任意点 x 处的微分，称为函数的微分，记作 dy 或者 $df(x)$，即

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{2.40}$$

显然，函数的微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关.

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx=\Delta x$，于是式(2.40)又记作

$$dy=f'(x)dx. \qquad (2.40')$$

所以说，函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数，因此，导数也称为微商.

例 2.43 求函数 $y=\frac{1}{x}+\ln x$ 的微分 dy.

解 由于 $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$,

所以
$$dy=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx.$$

三、微分的几何意义

下面通过几何图形来说明函数微分与导数及函数的增量之间的关系(图 2-7).

设函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可微分，即有

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$的图形是一条曲线，对应于 $x=x_0$，曲线上有一个确定的点 $M(x_0, y_0)$；对应于 $x=x_0+\Delta x$，曲线上有另一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. 由图 2-7 可看出

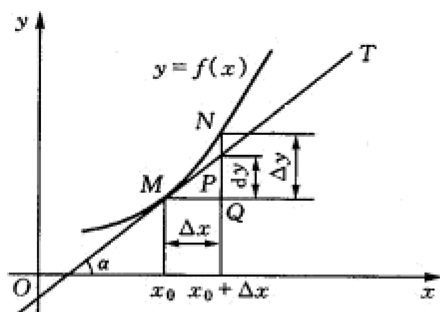


图 2-7

$$MQ=\Delta x,\ QN=\Delta y,$$

再过点 M 作曲线的切线 MT，它的倾角为 α，在 $\triangle MQP$ 中，

$$QP=MQ\tan\alpha=\Delta x f'(x_0)=dy,$$

即
$$dy=QP,$$

它表示曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0, y_0)$处切线的纵坐标增量. 而

$$\Delta y=QN$$

则表示曲线在点 $M(x_0, y_0)$处纵坐标的增量. 比较 QN 与 QP 可知，当 $|\Delta x|$ 很小时，由于在点 M 的邻近处，切线与曲线十分接近，$|\Delta y-dy|=|PN|$很小. 因此，从几何上看，用 dy 近似代替 Δy，就是在点 $M(x_0, y_0)$的邻近利用切线段 MP 近似代替曲线弧 MN.

四、函数的微分公式与微分法则

函数在某点处可微与可导是等价的. 由于函数的微分公式是

$$dy = f'(x)dx,$$

所以可以直接从函数的导数公式和求导法则，推出如下相应的微分公式和微分法则.

1. 微分公式

以几个函数为例，与导数公式一起列表于下表(表 2-1).

表 2-1

导数公式	微分公式
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

2. 函数的和、差、积、商的微分法则

为了便于对照，同时列出函数的和、差、积、商的求导法则于下表(表 2-2)，其中，$u=u(x)$，$v=v(x)$都具有导数.

表 2-2

函数的和、差、积、商的求导法则	函数的和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$(C 为常数)	$d(Cu) = Cdu$(C 为常数)
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$

现在我们仅对函数乘积的微分法则加以证明，其他法则都可以用类似方法证得.

根据微分的定义，有

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv,$$

所以

$$d(uv) = vdu + udv.$$

五、复合函数的微分法则与微分形式不变性

根据复合函数的求导法则，可直接推出复合函数的微分法则.

设函数 $y=f(\varphi(x))$是由可导函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

再根据微分的定义，便得到复合函数的微分公式

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx$$

或
$$dy=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

在上式中，由于 $\varphi'(x)dx=du$，所以复合函数的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du.$$

上式表明，无论 u 是自变量还是中间变量，$y=f(u)$的微分 dy 总可以用 $f'(u)$与 du 的乘积来表示. 这一性质称为**一阶微分形式不变性**.

例 2.44　$y=e^{\sin x}$，求 dy.

解　函数 $y=e^{\sin x}$是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，应用复合函数的微分法则，得

$$dy=(e^u)'(\sin x)'dx=e^u\cos x dx=e^{\sin x}\cos x dx.$$

也可以应用微分形式不变性来计算，即

$$dy=(e^u)'du=e^u\cos x dx=e^{\sin x}\cos x dx.$$

例 2.45　$y=\tan x\arctan x$，求 dy.

解　应用函数乘积的微分法则，得

$$\begin{aligned} dy &= d(\tan x\cdot\arctan x)=\arctan x\, d(\tan x)+\tan x\, d(\arctan x)\\ &=\arctan x\cdot\sec^2 x dx+\frac{\tan x}{1+x^2}dx\\ &=\left(\arctan x\cdot\sec^2 x+\frac{\tan x}{1+x^2}\right)dx. \end{aligned}$$

例 2.46　在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立：

(1) $d(\quad)=x^2dx$；　(2) $d(\quad)=\cos 2x dx$；

(3) $d(\quad)=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

解　(1) 因为 $d(x^3)=3x^2dx$，或写成

$$\frac{1}{3}d(x^3)=x^2dx,$$

即得
$$d\left(\frac{x^3}{3}\right)=x^2dx.$$

一般地，有 $d\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=x^2dx$（$C$ 为任意常数）.

(2) 因为 $d(\sin 2x)=2\cos 2x dx$，或写成

$$\frac{1}{2}d(\sin 2x)=\cos 2x dx,$$

即得

$$d\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\cos 2x dx.$$

一般地，有 $d\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C\right)=\cos 2x dx$（$C$ 为任意常数）.

(3) 因为 $d(e^{\sqrt{x}})=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$，或写成

$$2d(e^{\sqrt{x}})=e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

即得

$$d(2e^{\sqrt{x}}+C)=e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

六、微分在近似计算中的应用

在实际问题中，利用微分可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

1. 计算函数增量的近似值

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x. \tag{2.41}$$

利用(2.41)式可求函数增量的近似值.

例 2.47　一铜制的球壳，其内半径为 10cm，厚度为 0.1cm，求所用铜的体积的近似值.

解　因为球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，所用铜的体积是球体体积的增量 ΔV，由于 $r=10$，$dr=0.1$，则

$$\Delta V\approx dV=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'dr=4\pi r^2dr=4\pi\times 10^2\times 0.1=40\pi.$$

所以，所用铜的体积的近似值为 $40\pi(\text{cm}^3)$.

2. 计算函数的近似值

由(2.41)式可得出

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2.42}$$

利用(2.42)式可求函数的近似值

例 2.48　计算 $\sin 30°30'$ 的近似值.

解　设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，

若取 $x_0=\frac{\pi}{6}$，则

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

且 $\Delta x=\frac{\pi}{360}$比较小，则

$$\begin{aligned}\sin 30°30'&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\\&=0.5000+0.0076=0.5076.\end{aligned}$$

若在式(2.42)中，令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.43}$$

在式(2.43)中取 $x_0=0$，于是有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{2.44}$$

应用式(2.44)可推导下面几个常用的近似公式，当$|x|$很小时，有

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$；　　(2) $\sin x\approx x$；

(3) $\tan x\approx x$；　　(4) $\ln(1+x)\approx x$；

(5) $e^x\approx 1+x$.

下面只证明近似公式(1)和 (2).

证　(1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则 $f(0)=1$，

$$f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n}.$$

代入(2.44)，得 $$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x.$$

(2) 设 $f(x)=\sin x$ 则 $f(0)=0$；　$f'(0)=\cos x|_{x=0}=1$.

代入式(2.44)得 $$\sin x\approx x.$$

用类似方法可证明其他几个近似公式.

例 2.49　计算$\sqrt{26}$的近似值.

解　$\sqrt{26}=\sqrt{25+1}=\sqrt{25\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{1}{25}}\approx 5(1+0.02)=5.1$,

即 $$\sqrt{26}\approx 5.1.$$

例 2.50　计算$\sqrt[6]{1.03}$的近似值

解　$\sqrt[6]{1.03}=\sqrt[6]{1+0.03}\approx 1+\frac{0.03}{6}=1+0.005$,

即 $$\sqrt[6]{1.03}\approx 1.005.$$

例 2.51　计算$\sqrt{122}$的近似值.

解　选函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=121$，$\Delta x=1$.

由式(2.44)得　$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=11+\frac{1}{22}\times 1=11.05$.

习题 2-5

1．已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分.

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　(2) $y=x\sin 2x$；　(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

(4) $y=[\ln(1-x)]^2$；　(5) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$；　(6) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$；　(9) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

3．将适当的函数填入括号内，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$；　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$；　(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\,\mathrm{d}t$；

(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin\omega x\,\mathrm{d}x$；　(5) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\,\mathrm{d}x$.

4．利用微分求下列各式的近似值.

(1) $\sqrt{1.05}$；　(2) $\cos 29°$；　(3) $\tan 45°30'$；

(4) $\ln 0.995$；　(5) $\arctan 1.02$.

5．球壳外径为 20cm，厚度为 2mm，求球壳体积的近似值.

6．当 $|x|$ 很小时，证明近似公式.

(1) $\mathrm{e}^x\approx 1+x$；　(2) $\ln(1+x)\approx x$；

(3) $\sin x\approx x$；　(4) $\tan x\approx x$.

第三章　导数的应用

在讨论了导数的概念及求导法则的基础上，本章将介绍微分学的中值定理，然后以中值定理为理论依据，利用导数来求函数的极限，研究函数的性态及曲线的某些特性.

第一节　中值定理与洛必达法则

一、中值定理

1. 罗尔定理

定理 3.1　如果函数 $y=f(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续；

(2) 在开区间(a, b)内可导；

(3) 在区间两端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那么在(a, b)内至少存在一点 ξ，使得函数在该点处的导数等于零，即

$$f'(\xi)=0 \quad (a<\xi<b). \tag{3.1}$$

罗尔定理的几何意义：如果在连续曲线 $y=f(x)$上，除曲线的端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且曲线的端点的纵坐标相等，那么，在这条曲线上至少有一点 C（C 不是端点），使曲线在点 C 处的切线平行于 x 轴（也平行于连接曲线两端点的弦 $\overline{AB}$），如图 3-1 所示.

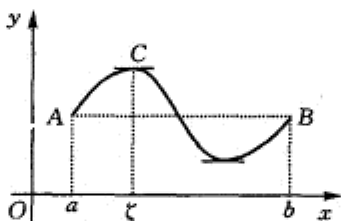


图 3-1

由图 3-1 可见，在曲线的最高点与最低点处的切线是平行于横轴的. 这就启发我们：在函数取得最大值或最小值处，若导数存在，则函数的导数为零.

例 3.1　设 $f(x)=x^2-3x+2$. 不用求导数的方法，说明方程 $f'(x)=0$ 在$(1, 2)$内一定有一个实根.

解　由于多项式 $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$处处可导，所以满足罗尔定理的前两个条件，又 $f(1)=f(2)=0$，所以 $f(x)$在$[1, 2]$上满足罗尔定理条件，由定理的结论知，在$(1, 2)$内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$. 所以 $x=\xi$ 就是方程$f'(x)=0$ 的根. 又因 $f'(x)=0$ 是一次方程，所以 $x=\xi$ 是方程$x=$

ξ 的唯一实根.

就一般函数而言，罗尔定理的前两个条件都能具备，而第三个条件不是容易满足的，这时有如下定理.

2．拉格朗日中值定理

定理 3.2　如果函数 $y=f(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续；

(2) 在开区间(a, b)内可导；

那么，在区间(a, b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.2}$$

成立.

从图 3-2 可以看出，式(3.2)的右边恰好是弦$\overline{AB}$的斜率，所以拉格朗日中值定理的几何意义是：如果在连续曲线 $y=f(x)$上，除曲线的端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，那么，在这条曲线上至少有一点 C，使曲线在 C 点处的切线平行于弦$\overline{AB}$.

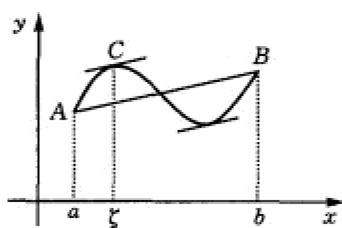


图 3-2

容易看出，在拉格朗日定理中，如果 $f(a)=f(b)$，则公式(3.2)就简化为 $f'(\xi)=0$，这时就成了罗尔定理.

推论 1　如果函数 $f(x)$在区间(a, b)内的导数恒为零，那么，则 $f(x)$在区间(a, b)内是一个常数.

证　在(a, b)内任取两点 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，由于 $f(x)$在(a, b)内可导，所以，$f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉洛朗日定理的条件，由式(3.2)得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

又因在(a, b)内 $f'(x)\equiv 0$，故有 $f'(\xi)=0$. 由上式可得 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即 $f(x_2)=f(x_1)$. 由于 x_1 和 x_2 在(a, b)内选取的任意性，这就表明，在区间(a, b)内任意两点处的函数值都相等，即 $f(x)$在(a, b)内是常数，证毕.

推论 2　如果在区间(a, b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)-g(x)=C$ (C 为任意常数).

3．柯西定理

我们知道，拉格朗日定理的几何意义是：如果连续曲线 $f(x)$上除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，那么，曲线上必有一点 C，使曲线在 C 点处的切线平行于连接曲线两端点的弦$\overline{AB}$(图 3-2). 如果曲线的方程以参数方程

$$\begin{cases}X=F(x),\\ Y=f(x)\end{cases}\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

给出，那么，弦$\overline{AB}$的斜率为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

由参数式函数的导数知，曲线在点$(X,\ Y)$处的切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

假定与 C 对应的参数为 $x=\xi$，于是曲线在 C 点出的切线平行于弦$\overline{AB}$(图 3-4)，可表示为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

这一事实就是下面的柯西定理.

定理 3.3 如果函数 $f(x)$和 $F(x)$满足以下条件：

(1) 在闭区间$[a,\ b]$上连续；

(2) 在开区间$(a,\ b)$内可导，且 $F'(x)\neq 0$，则在$(a,\ b)$内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{3.3}$$

成立.

从上面的几何图形上我们看到，柯西定理与拉格朗日定理有着密切的联系. 如果柯西定理中的 $F(x)=x$(相应地 $F(a)=a$，$F(b)=b$，$F'(\xi)=1$)，那么，柯西定理就成了拉格朗日定理. 因此，拉格朗日定理是柯西定理的特别情形.

二、洛必达法则

如果函数$\frac{f(x)}{F(x)}$当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，其分子、分母都趋于零或趋于无穷大，那么，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}$可能存在，也可能不存在，通常称这类极限为未定式，分别用记号$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$表示. 在第一章中讨论过的重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，就是$\frac{0}{0}$型的未定式. 这类极限是不能用商的极限法则进行计算的. 本节将根据柯西定理来推出计算这类极限的一种简便而又重要的方法—洛必达法则.

1. $\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的洛必达法则

下面先给出当 $x\to a$ 时计算$\frac{0}{0}$型未定式的洛必达法则.

定理 3.4 如果函数 $f(x)$和 $F(x)$满足以下条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$；

(2) 在点 a 的某邻域内(点 a 本身可以除外)可导，且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大).

那么
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}. \tag{3.4}$$
这就是说，当$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在时，原极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也存在且等于$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$；当$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$为无穷大时，原极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也是无穷大.

分析　定理的结论要求把两个函数之比与它们的导数之比联系起来．由此，我们联想到柯西定理．为了应用柯西定理，我们要补充 $f(x)$和 $F(x)$在 $x=a$ 处的定义，使它们在 $x=a$ 处连续.

证　令 $f(a)=F(a)=0$．由定理的条件(1)(2)知，$f(x)$和 $F(x)$在点 a 的某一邻域内是连续且可导(a 点的可导性除外)的．又因 $F'(x)\neq 0$，所以在以 a 为端点包含在该邻域内的闭区间$[a, x]$或$[x, a]$上，$f(x)$和 $F(x)$满足柯西定理的条件．因此有
$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间}).$$
令 $x\to a$，并对上式两端求极限，注意到 $x\to a$ 时 $\xi\to a$，再由定理 3.4 的条件(3)即可得到公式(3.4)，证毕.

例 3.2　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则得
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{1}=-1.$$

例 3.3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x(1+x)}=\infty.$$
通常在用洛必达法则之前，只要验证所求的极限是否为未定式，而洛必达法则的后两个条件在具体求导和求极限时得到了验证，故不必另外说明.

有时计算未定式，要重复几次应用洛必达法则方能得出结果．但每次应用洛必达法则之前，必须验证所求的极限确是未定式．下面举例说明.

例 3.4　求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{6x^2-24x+24}$.

解　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{6x^2-24x+24}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-2x-8}{12x-24}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{6x-2}{12}=\dfrac{5}{6}$.

例 3.5　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

定理 3.4 是关于 $x\to a$ 时，$\dfrac{0}{0}$未定式型的洛必达法则．此外当 $x\to\infty$时，$\dfrac{0}{0}$未定式型以及当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，$\dfrac{\infty}{\infty}$未定式型的洛必达法则仍适用．

例 3.6　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x^3}$.

解法一　所求的极限为$\dfrac{0}{0}$型，

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(\sec^2x^3)3x^2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

这里极限$\lim\limits_{x\to0}\sec^2x^3=1$先计算出来，再用洛必达法则求得结果．本例中，洛必达法则应用了两次．

解法二　当 $x\to0$ 时，$\tan x^3\sim x^3$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，可先用无穷小等价代换，再用洛必达法则．

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

例 3.7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{m}{x}\right)}{\sin\dfrac{1}{x}}$　(m 是常数)．

解法一　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{m}{x}\right)}{\sin\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{m}{x}}\left(-\dfrac{m}{x^2}\right)}{\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m}{\left(1+\dfrac{m}{x}\right)\cos\dfrac{1}{x}}=$
m.

解法二　令 $t=\dfrac{1}{x}$，则有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+mt)}{\sin t}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\frac{m}{1+mt}}{\cos t}=m.$$

例 3.8　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

例 3.9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$\lambda>0$，$n$ 为正整数）.

解　相继应用洛必达法则 n 次，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\cdots\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^ne^{\lambda x}}=0.$$

2. 其他未定式的计算

除了以上$\dfrac{0}{0}$和$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式之外，还有其他的未定式，如 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等. 对于这些未定式，不能直接应用洛必达法则. 通常要通过恒等变形或取对数等方法，将其归纳为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式，然后再用洛必达法则进行计算. 下面举例说明.

例 3.10　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解　这是 $0\cdot\infty$ 型的未定式，可先变形得

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

例 3.11　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　这是 $\infty-\infty$ 型的未定式，可先通分变形得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 3.12　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$.

解　这是 0^0 型的未定式，设 $y=x^{\sin x}$，两边取对数得

$$\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\cdot\ln x=\frac{\ln x}{\csc x}.$$

当 $x\to0^+$ 时，上式右端的分子分母都趋于无穷大，所以，可先用洛必达法则计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln y$.

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x\cdot\tan x}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\tan x=0.$$

又因为 $y=e^{\ln y}$，所以

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y}=e^0=1.$$

例 3.13　求$\lim\limits_{x\to0}(1-\sin2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　这是1^∞型的未定式，设 $y=(1-\sin2x)^{\frac{1}{x}}$，两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1-\sin2x)=\frac{\ln(1-\sin2x)}{x}.$$

先求 $\ln y$ 的极限.

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin2x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2\cos2x}{1-\sin2x}}{1}=-2.$$

所以

$$\lim_{x\to0}(1-\sin2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y}=e^{-2}.$$

例 3.14　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}$.

解　这是$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，若用洛必达法则，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\cos x}.$$

由于上式右端的极限不存在，此时洛必达法则的条件(3)不满足，因此，洛必达法则失效，但不能由此推出原极限不存在．因为洛必达法则的三个条件是能使结论成立的充分条件，并非必要条件．事实上，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

由于当 $x\to\infty$时，$\frac{\sin x}{x}$是无穷小量$\frac{1}{x}$与有界函数 $\sin x$ 之积，因而是无穷小．所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}=1.$$

习题 3-1

1．对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上验证罗尔定理的正确性.

2．验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ 在区间$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$上的正确性，并求出 ξ.

3．求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\arcsin(x+x^2)}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\ln(1+x^3)}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin x-\sin 2x-\sin 3x}{x^3}$.

4．求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$；

(3) $\lim\limits_{\varphi\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\varphi}$；　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{e^{ax}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+\ln x}{x\ln x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\tan x}$.

5．求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin 2x}$.

第二节　函数的单调性与极值

一. 函数的单调性的判别法

函数的单调性是函数的一个重要特征，它反映了函数在某个区间内随着自变量的增大而增大或是随着自变量的增大而减小的一种特性. 下面介绍如何利用导数的正、负号来判别函数的单调增减性.

为了直观起见，先考察单调函数的图形. 从图 3-3 中可以看出，如果函数 $y=f(x)$在某区间上单调增加，则它的图形是一条随 x 的增大而上升的曲线，这时曲线上各点处的切线的斜率非负，即 $f'(x)\geqslant 0$(仅可能在个别点处为零)，如图 3-3(a)所示.

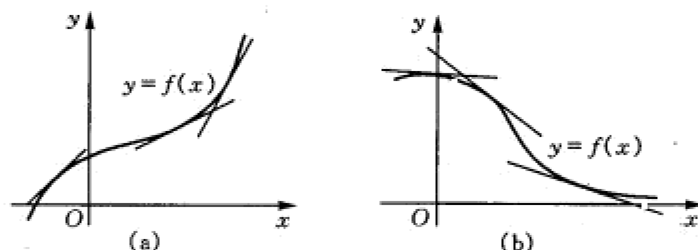


图 3-3

如果函数 $y=f(x)$在某区间上单调减少，则它的图形是一条随 x 的增大而下降的曲线，这时曲线上各点处的切线的斜率非正，即 $f'(x)\leqslant 0$(仅可能在个别点处为零)，如图 3-3(b)所示.

反之，能不能利用导数在某区间上的正负号判定函数的单调增减性呢?

下面应用拉格朗日中值定理来推出函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的单调性的判定法.

定理 3.5 （函数单调性的判定法） 设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，则有

(1) 如果在(a, b)内 $f'(x)>0$，那么，函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2) 如果在(a, b)内 $f'(x)<0$，那么，函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

证 在$[a, b]$上任取两点 x_1 和 x_2(不妨设 $x_1<x_2$)，由于 $f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续，在(x_1, x_2)内可导，应用拉格朗日中值定理有:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

上式中，已知 $x_2-x_1>0$，因在(a, b)内 $f'(x)>0$，故一定有 $f'(\xi)>0$，于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2).$$

由于 x_1 和 x_2 是区间 $[a, b]$ 上的任意两点，因而表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

同理，如果在 (a, b) 内 $f'(x)<0$，可推出函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，那么结论也成立.

例 3.15　判定 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, e]$ 上的单调性.

解　因为在 $(1, e)$ 内

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}>0,$$

所以，由判定法可知，函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[1, e]$ 上单调增加.

例 3.16　讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解　函数 $y=e^x-x-1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，求导得

$$y'=e^x-1.$$

可以看出，在 $x=0$ 处，$y'=0$，且 $x<0$ 时，$y'<0$；$x>0$ 时，$y'>0$. 从而利用使 $y'=0$ 的点 $x=0$ 来划分函数的定义域，便得到函数的单调区间：

在 $(-\infty, 0]$ 上函数 $y=e^x-x-1$ 单调减少；在 $(0, +\infty)$ 上函数 $y=e^x-x-1$ 单调增加.

例 3.16 中划分函数的单调区间的方法具有普遍意义，函数的单调增区间与单调减区间的分界点处的导数常常为零. 因此，对于可导函数，我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间之后，就可以使函数在各部分区间上是单调的. 除此之外还有另一种情形，见例 3.17.

例 3.17　讨论函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调性.

解　函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，求导得

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)}}.$$

因为在 $(-\infty, 1)$ 内 $y'<0$，所以函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调减少；同理，因为在 $(1, +\infty)$ 内 $y'>0$，所以函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调增加. 从而得知，$x=1$ 是函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调减区间 $(-\infty, 1]$ 与单调增区间 $(1, +\infty)$ 的分界点.

但函数在该点处的导数不存在(图 3-4). 因此，导数不存在的点也可以作

为划分函数单调区间的分界点.

我们把导数等于零的点称为驻点，导数不存在的点称为尖点.

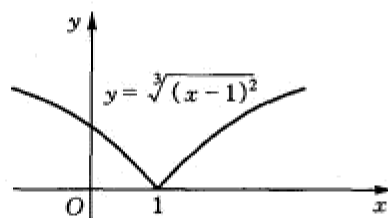


图 3-4

综合上述两种情况，求函数 $f(x)$ 的单调区间的一般步骤是：

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点和尖点. 并用这两种点按从小到大的顺序把定义域分成若干个子区间；

(3) 列表讨论单调性.

例 3.18 确定函数 $y=(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的单调区间.

解 此函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，求导得

$$y'=2(x-2)(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-2)^2\times\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{2}{3}(x-2)(x+1)^{-\frac{1}{3}}[3(x+1)+(x-2)]$$
$$=\frac{2(x-2)(4x+1)}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

令 $y'=0$，解方程 $2(x-2)(4x+1)=0$，得 $x=-\frac{1}{4}$ 或 $x=2$.

因为在点 $x=-1$ 处函数不可导，所以共有 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{4}$，$x_3=2$，3 个分点将函数的定义域分成 4 个子区间.

列表如下：

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

注：单调递增用符号↗表示，单调递减用符号↘表示.

因此，函数 y 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调减少，在区间 $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ 上单调增加；在区间 $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ 上单调减少，在区间 $(2, +\infty)$ 上单调增加.

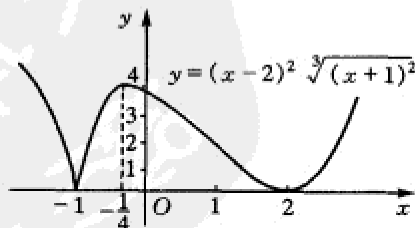


图 3-5

函数 $y=(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的图形如图 3-5 所示.

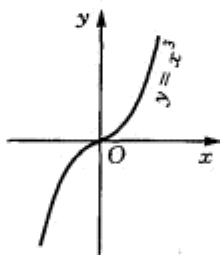


图 3-6

例 3.19　讨论函数 $y=x^3$ 的单调性.

解　函数 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，函数的导数为 $y'=3x^2$. 可以看出，除了点 $x=0$ 使 $y'=0$ 外，在其余各点处均有 $y'>0$. 因此 $y=x^3$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的.

一般地，如果函数 $f(x)$ 在某区间上连续，即使在区间内有个别点处导数为零或导数不存在，而在其余各点处 $f'(x)$ 均为正(或负)时，那么，函数 $f(x)$ 在该区间上的单调增加(或减少)保持不变.

利用函数的单调增减性，可以证明一些不等式.

例 3.20　证明不等式 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad(x>0)$.

证　因为当 $x>0$ 时，$1+x>0$，将要证的不等式变形，得

$$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x.$$

设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，只要证 $f(x)>0$. 因为当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加，又因为 $f(0)=0$，从而当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，故得

$$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0,$$

即

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}\quad(x>0).$$

二、函数的极值及其求法

在例 3.18 中我们看到，点 $x_1=-1$，$x_2=-\dfrac{1}{4}$，$x_3=2$ 是函数

$$y=f(x)=(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$$

的单调区间的分界点，在这些分界点两侧，函数的增减性发生变化. 例如，在点 $x=-\dfrac{1}{4}$ 的左邻域，函数是单调增加的，在点 $x=-\dfrac{1}{4}$ 的右邻域，函数是单调减少的. 因此，存在着点 $x=-\dfrac{1}{4}$ 的一个邻域，对于这邻域内的任何点 x，除了 $x=-\dfrac{1}{4}$ 之外，均有 $f(x)<f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ 成立. 同时，在点 $x=-1$ 及 $x=2$ 处也有类似的情形. 在这些点的邻域内除去点 $x=-1$ 及 $x=2$ 外，分别有 $f(x)>f(-1)$ 和 $f(x)>f(2)$ 成立，如图 3-5 所示. 这就是下面要讨论的函数的极值的问题.

定义 3.1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，对于点 $x_0\in(a, b)$，

如果存在点 x_0 的某一邻域，使得对于该邻域内(除点 x_0 外)的任一点 x，都有

(1) $f(x)<f(x_0)$成立，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值，称点 x_0 为 $f(x)$的一个极大值点.

(2) $f(x)>f(x_0)$成立，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一极小值，称点 x_0 为 $f(x)$的一个极小值点.

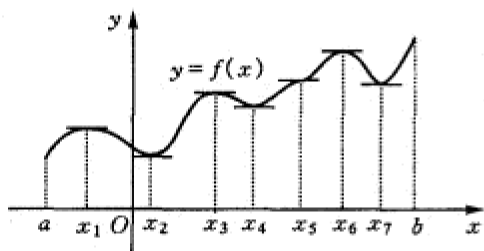


图 3-7

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使得函数取得极值的点称为极值点. 例如例 3.18 中的函数 $y=f(x)=(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$有极大值 $f\left(-\frac{1}{4}\right)=4.18$ 和极小值 $f(-1)=0$ 及 $f(2)=0$. 点 $x=-1$，$x=-\frac{1}{4}$和 $x=2$ 都是所给函数的极值点.

注

(1) 函数的极值是局部性概念，极值只是函数在某个邻域内的最大值和最小值，而最大值和最小值则是指定义区间上的整体性态，两者不可混淆；

(2) 一个函数在定义区间上可能有几个极大值或极小值，而极大值不一定就比极小值大，如图 3-7 中极大值 $f(x_1)$却小于极小值 $f(x_7)$；

(3) 一般地，极值不取在区间端点，而最值有可能取在区间的内部及端点.

现在来讨论函数极值的求法，现给出函数取得极值的必要条件，然后介绍函数取得极值的充分条件，即函数极值的判别法.

定理 3.6 (极值存在的必要条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 可导，且在 x_0 处取得极值，则函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数一定为零，即 $f'(x_0)=0$.

定理 3.6 表明：可导函数的极值点必定是它的驻点，但是反过来，函数的驻点却不一定是极值点. 例如，点 $x=0$ 是函数 $f(x)=x^3$ 的驻点，但却不是 $f(x)$的极值点(见图 3-6). 反过来，极值点也不一定是驻点. 例如，点 $x=0$ 是函数 $f(x)=|x|$的极值点，但却不是驻点，因为 $f'(0)$不存在. 因此，当求出了函数的驻点后，还要进一步判定求得的驻点是不是极值点. 如果是的话，还要判定函数在该点究竟是取得极大值还是极小值. 这些问题将由下面两个定理给出判定方法.

定理 3.7 (判定极值的第一充分条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，在点 x_0 的某个邻域内可导(点 x_0 可除外)且 $f'(x_0)=0$，如果在该邻域内点 x_0 的左右两侧邻近处有：

(1) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$在点

x_0 处取得极小值 $f(x_0)$；

(3) 当 $x \neq x_0$ 时，$f'(x)$同号，则函数 $f(x)$在点 x_0 处不取得极值.

证　由对于情形(1)，根据函数单调性的判定法，函数 $f(x)$在点 x_0 的左邻域是单调增加的，在点 x_0 的右邻域是单调减少的，因此，存在着点 x_0 的某一邻域，使得该邻域内除了点 x_0 外的任何点 x 都有$f(x)<f(x_0)$，从而$f(x_0)$是 $f(x)$的一个极大值(图 3-8(a)).

对于情形(2)也可以类似地证明(图 3-8(b)).

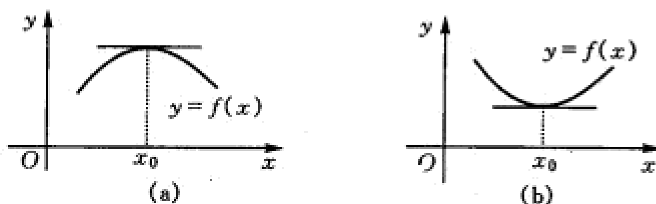


图 3-8

利用定理 3.7 来判定函数的极值，结合图 3-8 进行就更为直观. 同时可以看出，当 x 在 x_0 的邻近处渐增地经过 x_0 时，如果 $f'(x)$的符号不改变，则 $f(x)$在 x_0 处没有极值，这就是情形(3).

如果函数 $f(x)$在所讨论的区间内可导，应用上面定理求极值的步骤可归纳如下：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 求出导数 $f'(x)$得出 $f(x)$的所有驻点和尖点；

(3) 考察上述点两侧 $f'(x)$的符号，确定极值点；

(4) 求出各极值点处的函数值，即得函数的极大(小)值.

例 3.21　求函数 $f(x)=x(48-2x)^2$ 的极值.

解　函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，

$$f'(x)=(48-2x)^2+2x(48-2x)(-2)=12(x-24)(x-8).$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=8$，$x_2=24$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty, 8)$	8	$(8, 24)$	24	$(24, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(8)=8192$	↘	极小值 $f(24)=0$	↗

例 3.22　求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解　当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{4x-2}{3\sqrt[3]{x}}$.

当 $x=0$ 时，(x)不存在；令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x=\dfrac{2}{5}$.

列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因此，$f(x)$在 $x=0$ 处有极大值 $f'(0)=0$；在 $x=\frac{2}{5}$处有极小值 $f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

定理 3.8 （判定极值的第二充分条件） 设函数 $y=f(x0$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

证 对于情形(1)，由于 $f''(x_0)<0$，按二阶导数定义有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0.$$

根据函数极限的保号性，当 x 在x_0 的足够小的邻域内且 $x\neq x_0$ 时，有

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0,$$

但 $f'(x_0)=0$，所以由上式得

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

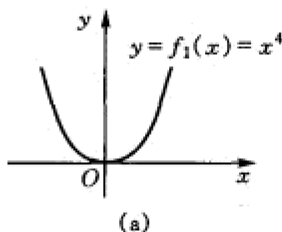
从而知道，在这邻域内除去 $x=x_0$ 外，对于其他一些 x，$f'(x)$与 $x-x_0$ 的符号相反. 因此，当 $x<x_0$，即 $x-x_0<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$，即 $x-x_0>0$ 时，$f'(x)<0$. 于是根据定理 3.7，$f(x)$在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

类似地，可以证明情形(2).

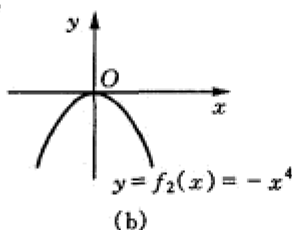
定理 3.8 告诉我们，如果函数 $f(x)$在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，则驻点一定是极值点，并且可以按二阶导数的符号来判定 $f(x_0)$是极大值还是极小值. 但如果 $f''(x_0)=0$，这时定理 3.8 就不能应用. 事实上，当 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$ 时，$f(x)$在 x_0 处可能有极大值，可能有极小值，也可能没有极值. 例如，$f_1(x)=x^4$，$f_2(x)=-x^4$，$f_3(x)=x^3$，这 3 个函数在 $x=0$ 处均有 $f'(0)=0$，$f''(0)=0$，而 $f_1(x)$有极小值 $f_1(0)=0$，$f_2(x)$有极大值 $f_2(0)=0$，$f_3(x)$没有极值. 它们的图形分别如图 3-9(a) (b) (c)所示.

因此，如果函数在驻点处的二阶导数为零，这时就要用定理 3.7(第一充分条件)，根据一阶导数在驻点左右邻域的符号来判定.

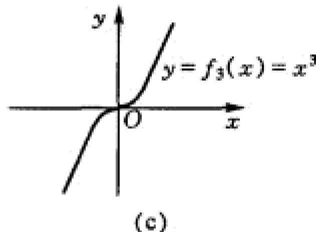
例 3.23 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ 的极值.



(a)



(b)



(c)

图 3-9

解 $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x_1=1$，$x_2=3$.

$$f''(x)=2x-4=2(x-2).$$

因为 $f''(1)=-2<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\frac{7}{3}$.

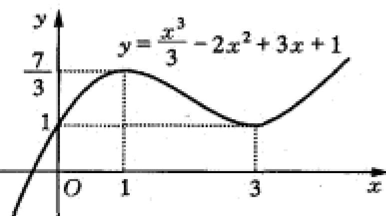


图 3-10

因为 $f''(3)=2>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=1$. 函数的图形如图 3-10 所示.

例 3.24 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$，

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

因为 $f''(0)=6>0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$；因为 $f''(-1)=f''(1)=0$，用定理 3.8 无法判定，改用定理 3.7. 当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$，因为在 $x=-1$ 的左右邻近处 $f'(x)$ 的符号没有改变，所以，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值. 同理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处也没有极值(图 3-11).

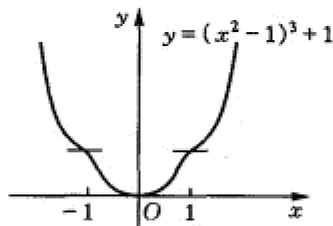


图 3-11

习题 3-2

1. 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=\ln x$；　　(2) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$；

(3) $f(x)=2x^2-\ln x$；　　(4) $f(x)=x-e^x$；

(5) $f(x)=x-2\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$；　　(6) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

2. 求下列函数的极值.

(1) $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$；　　(2) $f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$；

(3) $f(x)=x-\ln(1+x)$；　　(4) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

3. 求下列函数的单调区间和极值.

(1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$；

(2) $f(x)=(x^2-1)^2-1$；

(3) $f(x)=x+\tan x$；

(4) $f(x)=5-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

4. 用函数单调性证明不等式.

(1) $x>\ln(1+x)\quad(x>0)$；

(12) $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}\quad(x>1)$.

第三节　函数的最大值和最小值

在许多实际问题中，常常会遇到如何解决在一定的条件下最大、最小、最快、最省、最优等等的问题．对于这类问题，在数学上通常是设法将其归结为求某个函数的最大值或最小值问题来解决．下面先介绍可导函数在闭区间上的最大值、最小值的求法，然后通过举例介绍实际问题中的最大值、最小值的求法.

一、函数在闭区间上的最大值和最小值

如果函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数在该区间上一定取得最大值和最小值，称函数取得最大(小)值的点为函数在该区间上的最大(小)值点，它可能是这个区间的端点，也可能是这个区间内部的点．如果最大(小)值点在区间内部，它们一定是极值点．对于可导函数来说，这样的点一定是函数的驻点.

应当注意，如果函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，而在(a,b)内个别点处不可导，那么这些点也可能是最大(小)值点.

求函数的最大(小)值可按以下步骤进行：

(1) 求出函数 $f(x)$在(a,b)内的所有驻点(有限个)和个别导数不存在的点；

(2) 求出以上各点处的函数值及区间$[a,b]$端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$；

(3) 比较以上各函数值的大小，最大者为所求的最大值，最小者为所求的最小值.

例 3.25　求函数 $f(x)=x^3-3x+3$ 在闭区间$\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解　(1) 求驻点：

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1),$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点为 $x_1=-1$，$x_2=1$.

(2) 求函数值：

$$f(-1)=5,\ f(1)=1,\ f(-3)=-15,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8}.$$

(3) 比较各函数值，得函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值是 $f(-1)=5$，最小值为 $f(-3)=-15$.

例 3.26　求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在闭区间 $[-1,\ 1]$ 上的最大值和最小值.

解　(1) 求导数得

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点为 $x_0=\frac{2}{5}$. 容易看出，在 $x=0$ 处 $f'(x)$ 不存在.

(2) 求出各有关点处的函数值.

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}},\ f(0)=0,\ f(-1)=-2,\ f(1)=0.$$

(3) 比较以上各函数值，得所求的最大值为 $f(0)=f(1)=0$，最小值为 $f(-1)=-2$.

在某些特殊情况下，可以简化求最大(小)值的方法，例如：

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上单调增加(减少)，则 $f(a)$ 是最小(大)值，$f(b)$ 是最大(小)值；

(2) 如果连续函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导，而在 $(a,\ b)$ 内只有一个驻点，且是极值点，则当函数在该点处取得极大(小)值，该极大(小)值就是函数的最大(小)值. 这个结果对于开区间及无穷区间也适用.

二、实际问题中的最大值和最小值

下面通过举例来说明实际问题中的最大值、最小值的求法.

例 3.27　铁路线上 AB 段的距离为 100km. 工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB(见图 3-12). 为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂 C 修筑一公路，已知铁路上货运的运费与公路上货运的运费之比为 3:5，为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？

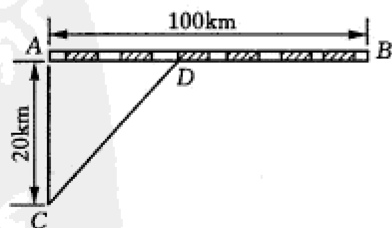


图 3-12

解　设 $|AD|=x$(km)，则

$$|BD| = 100 - x,$$

$$|CD| = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}.$$

由于铁路上货运的运费与公路上货运的运费之比为 3∶5，因此不妨设铁路上每 km 的运费为 $3k$，公路上每 km 的运费为 $5k$（k 为某个正数）．设从 B 点到 C 点需要的总运费为 y，则

$$y = 5k\,|CD| + 3k\,|DB|,$$

即

$$y = 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 100).$$

因此，问题就归结为：x 在$[0, 100]$上取何值时，函数 y 的值最小．

先求 y 对 x 的导数

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right),$$

令 $y' = 0$，得驻点 $x = 15$．

根据实际意义，运费的最小值一定存在，且驻点又是唯一的，因此可以断定在驻点 $x = 15$ 处，函数 y 取得最小值．从而当 $|AD| = x = 15$ 时，即选取 D 点在距 A 点为 15km 处，总运费最省．

一般地说，在实际问题中，只要根据问题的实际意义，就可以肯定可导函数 $f(x)$的最大(小)值一定存在，且在函数的定义区间内取得．这时，如果函数 $f(x)$在定义区间内只有唯一的驻点 x_0，可以直接断定 $f(x_0)$就是所求的最大(小)值．

例 3.28 要建造一个体积为 $V = 50\text{m}^3$ 的圆柱形封闭的容器，问怎样选择它的底半径和高，使所用的材料最省？

解 在这里，用料最省就是要求容器的表面积最小．设该容器的底半径为 r，高为 h(图 3-13)，则它的表面积 S 为

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

再由关系式

$$V = \pi r^2 h = 50.$$

得

$$h = \frac{50}{\pi r^2}.$$

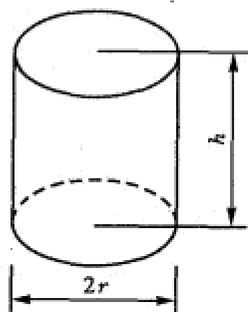


图 3-13

于是得 S 与 r 的函数关系式：

$$S = 2\pi r^2 + \frac{100}{r} \quad (0 < r < +\infty).$$

这样，问题就归结为求 r 为何值时，S 取得最小值．为此，求 S 对 r 的导数得

$$S' = 4\pi r - \frac{100}{r^2}.$$

令 $S' = 0$，得
$$r = \sqrt[3]{\frac{50}{2\pi}}.$$

因此，当圆柱形容器的半径为 $r = \sqrt[3]{\frac{50}{2\pi}}$ (m)，高为

$$h = \frac{50}{\pi r^2} = \frac{50}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{50}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{50}{2\pi}} \quad (\mathrm{m})$$

时用料最省.

在根据题义建立函数关系时，常常会碰到两个变量的情形．这时要找出除因变量之外的其他变量之间的关系，消去多余的变量，从而建立因变量与自变量之间的函数关系式．这种函数关系式在极值问题中，也称为目标函数．

例 3.29 有一批钢管要能水平地通过如图 3-14 所示的通道，问钢管的长度最多不超过多少？

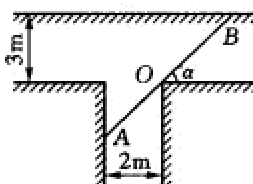


图 3-14

解 设钢管 AB 的长度为 l(m)，绕 O 点转角 α 如图 3-14 所示，则

$$AO = \frac{2}{\cos\alpha}, \ OB = \frac{3}{\sin\alpha},$$

$$l = AO + OB = \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{3}{\sin\alpha}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

问题就是要求：当 α 为何值时，函数 l 取最大值.

将 l 对 α 求导，得

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{3\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\sin^3\alpha - 3\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$$

令 $\frac{dl}{d\alpha} = 0$，得 $2\sin^3\alpha = 3\cos^3\alpha = 0$，即

$$\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \quad 或 \quad \cot\alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

所以

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{9}{4}}},$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha = \sqrt{1 + \cot^2\alpha} = \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}}.$$

故所求钢管的最大长度为

$$l = 2\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{9}{4}}} + 3\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}} \approx 7.02(\mathrm{m}),$$

即钢管要能水平地通过通道，最长不能超过约 7.02m.

习题 3-3

1. 求下列函数在指定区间上的最大值与最小值.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $[-2, 2]$;

(2) $y=x+\sqrt{1-x}$, $[-5, 1]$;

(3) $f(x)=\sqrt{100-x^2}$, $[6, 8]$;

(4) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$, $[-2, 2]$.

2. 求证：周长为定值 L 的所有矩形中，正方形的面积最大.

3. 要做一个上部为半圆形，下部为矩形的窗户，设计的周长为 L，问窗的高度，宽度如何安排才能透光最好(如图 3-15)?

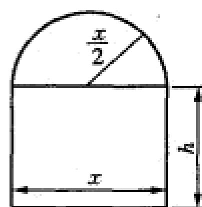


图 3-15

4. 有甲乙两城，甲城位于一条直线形河岸，乙城离岸 40km，乙城到岸的垂足与甲城距离为 50km，两城在此河边合建一水厂取水，从水厂到甲城和乙城的水管费用分别为 500 元/km 与 700 元/km，问此水厂应建在何处才能使水管费最省?

5. 有一块宽为 $2a$ 的长方形铁皮，将宽的两个边缘向上折起，做成一个开口水槽，其横截面为矩形，高为 x，问高 x 取何值时水槽的流量最大(如图 3-16)?

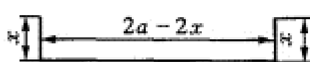


图 3-16

6. 设半径为 R 的球内接一个圆柱体，试求体积为最大的圆柱体.

7. 在坐标平面上通过一已知点 $P(1, 4)$ 引一条直线使它在两坐标上的正截距之和为最小，求此直线方程.

第四节　曲线的凹凸性、拐点及函数图形的描绘

一、曲线的凹凸性

前面，讨论了函数的单调性与极值，这对于描绘函数的图形有较大的作用. 但仅有这些知识，还不能比较准确地描绘函数的图形. 例如，在图 3-17 中，函数 $y=x^2$ 和函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形，当 $x>0$ 时虽然都是单调上升的，但在上升过程中，它们的弯曲方向有显著的不同. $y=x^2$ 的图形是向上凹的(或称凹的)，而 $y=\sqrt{x}$ 的图形是向上凸的(或称凸的). 可见，函数图形的弯曲方向可用曲线弧的“凹凸性”来描述.

下面就来讨论曲线的凹凸性及其判定法.

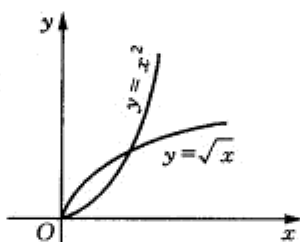


图 3-17

从几何图形上看到，曲线弧的凹与凸可通过曲线与其切线的相对位置来确定(图 3-18). 如在图 3-18(a)中，曲线弧上任意一点的切线都在曲线弧的下方，而曲线弧是凹的；又如图 3-18(b)中，曲线弧上任意一点的切线都在曲线弧的上方，而曲线弧是凸的. 下面给出曲线的凹凸性的定义.

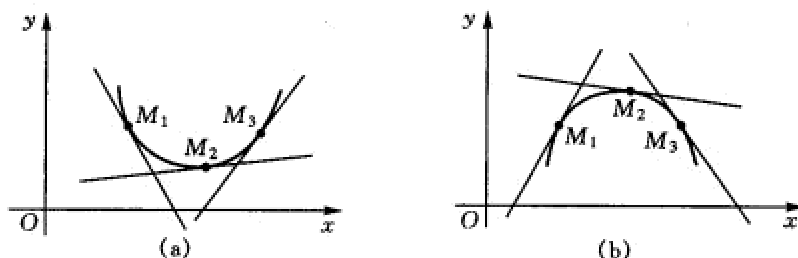


图 3-18

定义 3.2 设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a,b)内可导.

(1) 若对于任意的 $x_0\in(a, b)$，曲线弧 $y=f(x)$过点$(x_0, f(x_0))$的切线总位于曲线弧 $y=f(x)$的下方，则称曲线弧 $y=f(x)$在$[a,b]$上是**凹**的(简称**凹弧**)；

(2) 若对于任意的 $x_0\in(a, b)$，曲线弧 $y=f(x)$过点$(x_0, f(x_0))$的切线总位于曲线弧 $y=f(x)$的上方，则称曲线弧 $y=f(x)$在$[a, b]$上上是**凸**的(简称**凸弧**).

如果 $y=f(x)$在(a, b)内二阶可导，则可利用二阶导数的符号来判定曲线弧的凹凸性.

定理 3.9 （曲线弧的凹凸性的判定法） 设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数，那么

(1) 若在(a, b)内 $f''(x)>0$，则曲线弧 $y=f(x)$在$[a, b]$上是凹的；

(2) 若在(a, b)内 $f''(x)<0$，则曲线弧 $y=f(x)$在$[a, b]$上是凸的.

注 如果把定理中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，那么定理的结论也成立.

例 3.30 判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解 该函数的定义域为$(0, +\infty)$. 因为

$$y'=\frac{1}{x},\ y''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},$$

所以在$(0, +\infty)$内，$y''<0$. 由曲线的凹凸性判定定理可知，曲线 $y=\ln x$ 在$(0, +\infty)$上是凸的(图 3-19).

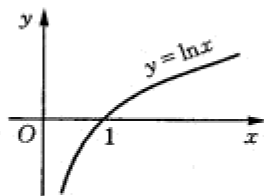


图 3-19

例 3.31 求曲线 $y=(x-1)^3$ 的凹凸区间.

解 $y'=3(x-1)^2$，$y''=6(x-1)$.

令 $y''=0$ 得 $x=1$. 将该函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成两个子区间：

$$(-\infty, 1) \text{ 及 } (1, +\infty).$$

由于在 $(-\infty,1)$ 内 $y''<0$，故曲线在 $(-\infty,1]$ 上是凸弧；由于在 $(1,+\infty)$ 内 $y''>0$，故曲线在 $(1,+\infty)$ 上是凹弧. 因此，点 $(1,0)$ 是曲线 $y=(x-1)^3$ 的凸弧与凹弧的分界点(图 3-20).

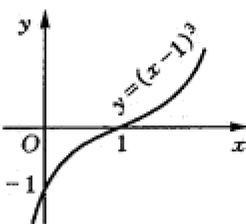


图 3-20

二、曲线的拐点

定义 3.3 连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点，称为曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**.

例如，在例 3.31 中，曲线 $y=(x-1)^3$ 上的点 $(1,0)$ 就是该曲线的拐点.

应当注意，拐点是曲线上的点，一般记作 $(x_0, f(x_0))$. 它与驻点和极值点不同，驻点和极值点都在轴上，而拐点在曲线上.

求曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的拐点的步骤：

(1) 求 $f''(x)$，找出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点 x_i；

(2) 这些点 x_i 把 (a,b) 分成若干个子区间，在其上考察 $f''(x)$ 的符号；

(3) 若 $f''(x)$ 在 x_i 两侧异号，点 $(x_i, f(x_i))$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；否则不是拐点.

例 3.32 讨论函数 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸性，并求该曲线的拐点.

解 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=4x^3-6x^2,\ y''=12x(x-1).$$

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=1$.

列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+		−		+
$y=f(x)$ 的凹凸性	$\smile$	拐点(0, 1)	$\frown$	拐点(1, 0)	$\smile$

注：表中 $\smile$ 表示曲线弧是凹的，$\frown$ 表示曲线弧是凸的.

当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=1$ 时，$y=0$. 故所求的拐点为 $(0,1)$ 及 $(1,0)$.

例 3.33 讨论曲线 $y=x^4$ 是否有拐点?

解 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=4x^3$，$y''=12x^2$.

令 $y''=0$ 得 $x=0$，当 $x\neq0$ 时均有 $y''>0$，即在 $x=0$ 的左、右两侧 y'' 的符号相同. 从而可知，点 $O(0,0)$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点. 因此，该曲线没有拐

点，它在$(-\infty, +\infty)$上是凹的.

例 3.34　求曲线$y=\sqrt[3]{x-1}$的凹凸区间及拐点.

解　该函数在其定义域$(-\infty, +\infty)$内连续(图 3-21).

当$x\neq 1$时，

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}},\quad y''=-\frac{3}{9(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

当$x=1$时，y'，y''都不存在，点$x=1$把$(-\infty, +\infty)$分成两个子区间$(-\infty, 1]$和$[1, +\infty)$.

在$(-\infty, 1]$内$y''>0$，曲线在$(-\infty, 1]$上是凹的；在$[1, +\infty)$内$y''<0$，曲线在$[1, +\infty)$上是凸的.

当$x=1$时，$y=0$，故点$(1, 0)$是该曲线上的一个拐点(图 3-21).

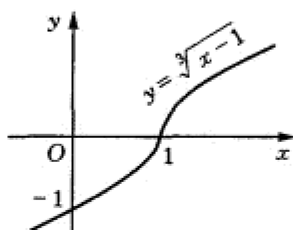


图 3-21

三、函数图形的描绘

1. 水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，则称直线$y=b$为曲线$y=f(x)$的**水平渐近线**.

例如，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，所以$y=\frac{\pi}{2}$是曲线$y=\arctan x$的水平渐近线. 类似地，因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，所以$y=-\frac{\pi}{2}$也是曲线$y=\arctan x$的水平渐近线.

2. 铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\infty$，则称直线$x=c$为曲线$y=f(x)$的**铅直渐近线**.

例如，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以直线$x=0$是曲线$y=\ln x$的铅直渐近线.

又如，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以直线$x=0$是曲线$y=e^{\frac{1}{x}}$的铅直渐近线.

3. 函数图形的描绘

利用导数描绘函数的图形，其一般步骤如下：

(1) 确定函数$y=f(x)$的定义域，观察函数是否具有某些特性如奇偶性、周期性等，并求出函数的一阶导数$f'(x)$和二阶导数$f''(x)$；

(2) 求出$f'(x)=0$及$f''(x)=0$在函数定义域内的全部实根，用这些根把函数的定义域分成几个子区间(如果函数有间断点或导数不存在的点，那么也把它们作为分点)；

(3) 确定在各部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值点及拐点，然后列表讨论(表格式样可参见下面的例题)；

(4) 确定函数图形是否有水平或铅直渐近线；

(5) 算出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根(包括导数不存在的点)所对应的函数值，以定出图形上相应的点；为了把图形描绘得更加准确些，必要时再补充一些点，特别是函数图形与坐标轴的交点；然后结合(3)(4)中的结果，连接这些点作出函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 3.35　作出函数 $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ 的图形.

解　(1) 所给函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，其导数为

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$
$$f''(x)=2x-4=2(x-2).$$

(2) $f'(x)=0$ 的根为 $x_1=1$，$x_2=3$，$f''(x)=0$ 的根为 $x_3=2$. 上述三个根把定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分成四个子区间，依次排列如下：

$$(-\infty, 1],\ [1, 2],\ [2, 3],\ [3, +\infty).$$

(3) 将各子区间内函数的增减、凹凸及分界点处函数是否有极值或拐点一并列入表内：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形	↗(凸)	极大	↘(凸)	拐点	↘(凹)	极小	↗(凹)

这里，记号↗(凸)表示曲线弧上升而且是凸的，↘(凸)表示曲线弧下降而且是凸的，↘(凹)表示曲线弧下降而且是凹的，↗(凹)表示曲线弧上升而且是凹的. 从表中可以看出，函数在 $x=1$ 处取得极大值，在 $x=3$ 处取得极小值.

(4) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$，表示曲线 $y=f(x)$ 无水平渐近线. 又因所给函数没有无穷间断点，故也无铅直渐近线.

(5) 算出 $x=1, 2, 3$ 处的函数值：

$$f(1)=\frac{7}{3},\ f(2)=\frac{5}{3},\ f(3)=1.$$

从而得到函数 $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ 图形上的三个点：

$$\left(1, \frac{7}{3}\right),\ \left(2, \frac{5}{3}\right),\ (3, 1),\ \text{其中}\left(2, \frac{5}{3}\right)\text{是拐点}.$$

再适当补充一些点，如曲线与坐标轴的交点等. 由于 $f(0)=1$，$f(-1)=-\frac{13}{3}$，$f(4)=\frac{7}{3}$ 从而又得到函数图形上的三个点：

$(0, 1)$, $\left(-1, -\dfrac{13}{3}\right)$, $\left(4, \dfrac{7}{3}\right)$.

首先将以上这些点在坐标平面上定出，再根据表中所示图形的特征描绘出函数的图形，见图 3-22. 如果讨论的函数是奇函数或偶函数，那么，描绘函数图形时可以利用图形的对称性简化作图步骤.

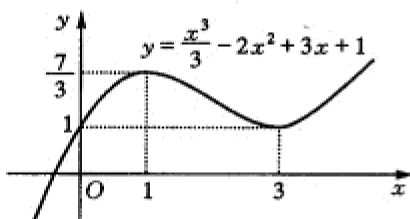


图 3-22

例 3.36 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 (1)所给函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 由于 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，它的图形对称于 y 轴. 下面我们可以只讨论 $[0, +\infty)$ 上该函数的图形. 求出

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f''(x)=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}(x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(2) 在 $[0, +\infty)$ 上，方程 $f'(x)=0$ 的根为 $x_1=0$；方程 $f''(x)=0$ 的根为 $x_2=1$.

用点 $x_1=0$ 和 $x_2=1$ 把区间 $[0, +\infty)$ 划分为两个子区间 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$.

(3) 列表讨论单调性、凹凸性、极值与拐点：

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$f'(x)$	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	0	+
$y=f(x)$的图形	极大值	↘	拐点	↘

从表中可以看出，函数在 $x=0$ 处有极大值；当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$，点 $\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ 是这曲线的拐点；

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以图形有一条水平渐近线 $y=0$. 又因 $f(x)$ 没有无穷间断点，故无铅直渐近线；

(5) 算出 $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，又由于 $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$，从而得到图形上两点 $M_1\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

结合(3)(4)中讨论的结果，适当补充点，如 $M_3\left(2, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$，便可画出函

数在[0, +∞)上的图形. 最后利用图形的对称性描出函数在整个定义域(-∞, +∞)上的图形(图 3-23).

这个函数图形就是“概率统计”中常用的标准正态分布曲线.

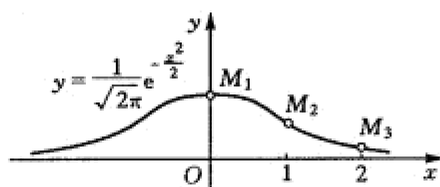


图 3-23

习题 3-4

1. 判定下列曲线的凹凸性.

(1) $y=4x-x^2$; (2) $y=x\arctan x$; (3) $y=(x+1)^4+e^x$.

2. 求下列曲线的凹凸区间及拐点.

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$; (2) $y=\ln(x^2+1)$; (3) $y=e^{\arctan x}$.

3. 已知曲线 $y=x^3+ax^2-9x+4$ 在 $x=1$ 有拐点, 试确定系数 a, 并求曲线的拐点和凹凸区间.

4. 求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; (2) $y=\frac{e^x}{1+x}$; (3) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

(4) $y=x^2+\frac{1}{x}$.

5. 作出下列函数的图象.

(1) $y=3x-x^3$; (2) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$; (3) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=\ln(x^2-1)$; (5) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; (6) $y=xe^{-x^2}$.

第五节 曲 率

许多实际问题都要求定量地研究曲线的弯曲程度. 例如, 设计铁路、公路时, 如果弯曲程度不合适, 便容易造成事故; 又如, 在机械和土建工程中, 各种梁在荷载作用下, 要弯曲变形. 在数学上用曲率来表示曲线的弯曲程度. 在研究曲率之前, 将先介绍曲线弧微分这个概念, 它在本节和以后的应用中都占有重要地位.

一、弧微分

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内有连续导数，即 $f'(x)$ 连续．在曲线 $y=f(x)$ 上取定点 $A(x_0,\ y_0)$，作为计算曲线弧长的起点，点 $M(x,\ y)$ 是其上的任意一点，并规定：

(1) 以 x 增大的方向作为弧的正方向，即该曲线的任一弧段 AM 是有方向的．

(2) 记有向弧段 AM 的长度为 s，当 AM 的方向与曲线的正向一致时，s 取正号；当 AM 的方向与曲线的正向相反时，s 取负号．

显然，对于任意一个 x，在曲线上相应地有一个点 M，那么 s 就有一个确定的值与之对应，因此弧长 s 是 x 的函数．记为

$$s=s(x),$$

且由规定(2)可知，它是一个单调递增的函数．

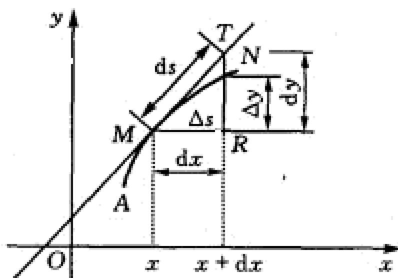


图 3-24

下面我们来求弧长 $s=s(x)$ 的微分 $\mathrm{d}s$，简称为弧微分．

一般情况下，给出的是曲线的方程 $y=f(x)$，而 $s=s(x)$ 是未知的．下面将通过适当的变换，将 $\mathrm{d}s$ 用已知函数的导数 $y=f(x)$ 来表示．

在曲线 $y=f(x)$ 上另取与 $M(x,\ y)$ 邻近的点 $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$（如图 3-24）．有向弧段 AM 的长度为 s，有向弧段 MN 的长度为 Δs，简记为

$$AM=s,\ MN=\Delta s.$$

可以证明
$$\lim_{M_1\to M}\frac{|\Delta s|}{|MN|}=1.$$

在直角三角形 MRN 中，

$$|MN|^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2,$$

于是有

$$\left(\frac{|MN|}{|\Delta s|}\right)^2(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

两边同除以 $(\Delta x)^2$，得

$$\left(\frac{|MN|}{|\Delta s|}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

当 $N\to M$ 时，$\Delta x\to 0$，求上式两边的极限，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{|MN|}{|\Delta s|}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2=1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

上式两边开平方，得

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

因为 $s=s(x)$ 为单调递增函数，故 $\frac{ds}{dx}\geqslant 0$，因此得曲线弧长的导数公式

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

和弧微分公式

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

或

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

从图 3-24 可以看出，弧微分 ds 就是曲线上点 $M(x, y)$ 处的切线段 $|MT|$. 通常把直角三角形 MRT 叫做曲线在 M 点的**微分三角形**.

二、曲率及其计算公式

有了弧微分的概念，就可以对曲线的弯曲程度进行研究了. 下面先从几何图形直观地分析曲线的弯曲程度是由哪些量来确定的.

当动点沿曲线弧从 M 移到 N 时(图 3-25)，切线的转角为 α. 可以看出，转角 α_1 比 α 小，曲线弧 MN_1 的弯曲程度比弧 MN 也小. 一般地，若两弧的长度相等，则转角愈小，曲线弧的弯曲程度也愈小.

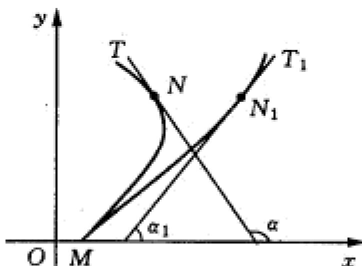


图 3-25

显然，若曲线弧的弯曲程度愈小，则转角也愈小.

但是，转角的大小还不能完全反映曲线弯曲的程度. 例如，在图 3-26 中我们看到，两段曲线弧 MN 与 M_1N_1，尽管它们的转角 α 相同，然而弯曲的程度并不相同，曲线弧短的比曲线弧长的弯曲得厉害些.

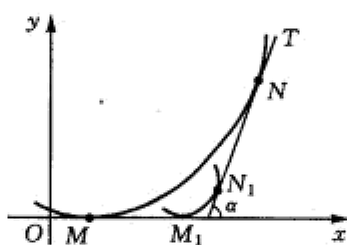


图 3-26

由此可见，曲线弧的弯曲程度与弧两端切线的转角大小及该弧的长度有关.

综合上面的分析可知：弧的弯曲程度可用弧两端切线的转角与弧长之比来描述，这个比值的大小，决定着弧的弯曲程度.

定义 3.3 把弧两端切线的转角与弧长之比的绝对值，叫做这段弧上的平均曲率，记为 $\overline{K}$，即

$$\overline{K}=\left|\frac{\alpha}{\Delta S}\right|.$$

曲线上各点附近的弯曲程度不一定处处相同，所以弧的平均曲率，一般只能表示整段弧的平均弯曲程度．显然，当弧愈短时，平均曲率就愈能近似地表示弧上某一点附近的弯曲程度．下面我们就给出曲线在某一点的曲率的定义．

定义 3.4　当 N 点沿曲线趋近于 M 点时，弧 MN 的平均曲率的极限，叫做曲线在 M 点的曲率．记做 K，即

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

注　这里的角用弧度表示，平均曲率和曲率的单位为弧度/单位长．

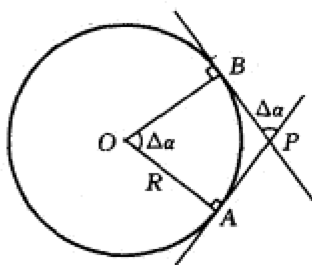


图 3-27

例 3.37　已知圆的半径为 R，求圆上

(1) 任一段的平均曲率；

(2) 任一点的曲率．

解　(1) 如图 3-27，在圆上任意取一段弧 AB，弧两端切线 AP 与 BP 的转角 $\Delta\alpha$ 等于半径 OA 与 OB 的夹角，且 $\Delta s=R\cdot\Delta\alpha$，因此，

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\Delta\alpha}{R\cdot\Delta\alpha}\right|=\frac{1}{R}.$$

(2) 圆上任一点的曲率．

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}.$$

上述结论表示，圆上任一段弧的平均曲率和任一点的曲率都相等，而且等于半径 R 的倒数．这就是说，圆的弯曲程度处处一样，且半径越小，曲率越大，即弯曲得越厉害．

三、曲率的计算公式

现在来推导一般曲线 $y=f(x)$ 在任意点的曲率的计算公式．由曲率定义

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}\right|,$$

由于 $y'=\tan\alpha$，$\alpha=\arctan y'$，因此$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y''}{1+y'^2}$，而 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$，于是有

$$K=\left|\frac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}\right|=\frac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}\cdot(1+y'^2)}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

这就是曲线 $y=f(x)$在任意点(x, y)处的曲率的计算公式.

由公式可知，在使函数 $y=f(x)$的二阶导数等到于零的点处，曲率等于 0. 所以直线上每点处的曲率都是零；曲线上的拐点处的曲率也为零.

例 3.38 求曲线 $y=\frac{1}{x}$在点(1, 1)处的曲率.

解 因为 $y'=-\frac{1}{x^2}$，$y'|_{x=1}=-1$，$y''|_{x=1}=2$，
代入公式，得

$$K=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

四、曲率半径和曲率圆

许多力学和工程技术问题往往还涉及曲率半径，曲率中心和曲率圆的讨论. 本节将对这三个概念分别给予简要的介绍.

设曲线 $y=f(x)$上某点 $M(x, y)$的曲率为 K 且不为 0，则其倒数$\frac{1}{K}$称为该曲线在点$M(x, y)$处的曲率半径，记为 R. 即

$$R=\frac{1}{K} \quad 或 \quad R=\frac{1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

由此可见，曲线上曲率半径较大的点处的曲率较小，反之，则该点曲率较大.

若在曲线 $y=f(x)$上的点 M 处，沿其凹向一侧的法线上取线段 MC，其长等于曲率半径 R. 则点 C 称为该曲线在点M 处的曲率中心，以 C 为中心，曲率半径 R 为半径的圆，叫做该曲线在点 M 处的曲率圆(图 3-28).

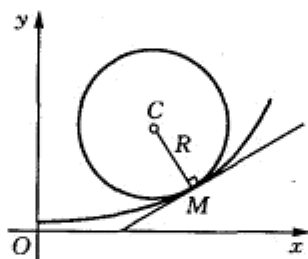


图 3-28

若曲线 $y=f(x)$在点 M 处的曲率为K，则由曲率圆的定义可知，该曲线在 M 处的曲率圆的半径$R=\frac{1}{K}$. 因此，曲线在 M 点处曲率圆的曲率也为K. 这表明，曲线上某点处的曲率与该点曲率圆的曲率相等，为此，在研究曲线上某点附近的弧段的形态时，可以用曲线在该点的曲率圆上相应的弧段近似代替，从而以我们熟悉的圆的知识来分析曲线上这弧段的形态，使问题的讨论得以简化.

例 3.39 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大?

解 由 $y'=2ax+b$，$y''=2a$ 得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

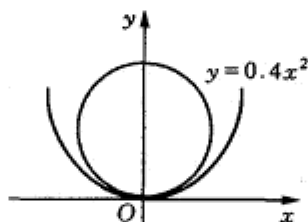


图 3-29

因为 K 的分子是常数，所以只要分母最小，K 就最大. 显然当 $2ax+b=0$，即 $x=-\frac{b}{2a}$时，分母最小，此时 K 的值最大.

所以抛物线在点$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$处曲率最大，这一点就是抛物线的顶点，因此抛物线在顶点处的曲率最大.

例 3.40　设工件表面的截线 $y=0.4x^2$ 为抛物线(图 3-29). 现拟用砂轮磨削其内表面，试问，选用多大直径的砂轮比较合适?

解　为了保证工件的形状与砂轮接触处附近的部分不被磨去太多，砂轮的半径应当小于或等于该抛物线上曲率半径的最小值. 由上例知抛物线在其顶点处的曲率最大，也就是说抛物线在其顶点处的曲率半径最小，为此求抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点(0, 0)的曲率半径.

$$y'=0.8x \quad 和 \quad y''=0.8;\quad y'|_{x=0}=0 \quad 和 \quad y''|_{x=0}=0.8.$$

于是曲率半径的最小值为

$$R=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.8}=1.25.$$

可见，应选半径不超过 1.25 单位长，即直径不超过 2.50 单位长的砂轮.

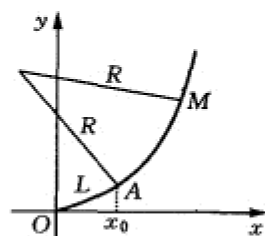


图 3-30

例 3.41　在铁轨由直道进入圆弧弯道时，由于接头处的曲率突然改变，容易产生事故，为了平稳行驶，往往在直线和圆弧交接处接入一段缓冲曲线(如图 3-30)，使它的曲率逐步地由零过渡到$\frac{1}{R}$(R 为圆弧半径)，通常采用立方抛物线 $y=\frac{x^3}{6RL}$ 作为缓冲曲线，其中 L 为弧 OA 的长度，试验证缓冲曲线弧 OA 在端点 O 处的曲率为零，并且当$\frac{L}{R}$很小时，在 M 处的曲率为$\frac{1}{R}$.

解　弧 OM 的方程为 $y=\frac{x^3}{6RL}$，所以

$$y'=\frac{x^2}{2RL},\ y''=\frac{x}{RL}$$

在 $x=0$ 处，$y'=0$ ，$y''=0$，故缓冲曲线在 O 点的曲率为 $K=0$.

设 A 点的横坐标为 x_0，注意到 L 与 x_0 比较接近，所以可以用 L 近似代替

x_0，于是

$$y'|_{x=x_0}=\frac{x_0^2}{2RL}\approx\frac{L^2}{2RL}=\frac{L}{2R},$$

$$y''|_{x=x_0}=\frac{x_0}{RL}\approx\frac{L}{RL}=\frac{1}{R}.$$

故在 A 点的曲率为

$$K_A\approx\frac{\frac{1}{R}}{\left[1+\left(\frac{L}{2R}\right)^2\right]^{3/2}},$$

因为已知 $\frac{L}{R}\ll 1$，故可略去 $\left(\frac{L}{2R}\right)^2$ 项，得

$$K_A\approx\frac{1}{R}.$$

综合上述结果可以看出，在直轨道和圆弧轨道中间接上一段缓冲曲线轨道后，就能使铁路的曲率 K 从 0 连续地变到 $\frac{1}{R}$，从而可使列车在转弯时行驶平稳，保证安全. 为什么不以圆弧为过渡曲线呢？这是因为，任何与 OB 相切的圆弧，在 O 点的曲率都不会为零. 因此火车经过 O 点向心力发生突变，从而产生剧烈震动，这是不符合安全运行要求的.

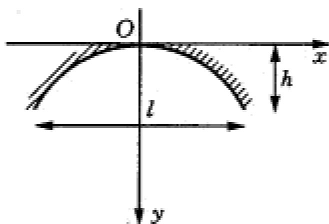


图 3-31

例 3.42　设一辆质量为 m 的汽车以速度 v 经过图 3-31 所示的抛物形拱桥，该桥的跨度为 lm，高度为 hm. 试问当汽车驶过顶点 O 时，对桥的压力多大？

解　首先，质量为 m 的质点，以线速度 $\vec{v}$(其大小为 v)沿半径为 r 的圆周作匀速圆周运动时，质点所受到的向心力为 $\frac{mv^2}{r}$. 若质点沿曲线 $y=f(x)$ 运动，我们可用该点的曲率圆弧代替其附近的曲线段. 因此，质点在曲线上某点所受的向心力等于 $\frac{mv^2}{R}$，其中 R 为曲线在该点的曲率半径.

为此，我们应建立拱桥的曲线方程. 取坐标如图 3-31 所示，已知拱桥形状为抛物线，所以，设为 $y=ax^2$，因为 $x=\frac{l}{2}$ 时 $y=h$，所以 $a=\frac{4h}{l^2}$，即

$$y=\frac{4h}{l^2}x^2.$$

由 $y'=\frac{8h}{l^2}x$，$y''=\frac{8h}{l^2}$，可求得 $x=0$ 时即顶点 O 处的曲率半径 $R=\frac{1}{K}=$

$\frac{l^2}{8h}$，故汽车经过 O 点时所受的向心力为 $\frac{8mv^2h}{l^2}$.

因为汽车对桥面的压力 F = 重力 − 向心力，所以过 O 点时桥面所受压力

$$F = mg - \frac{8mv^2h}{l^2} = mg\left(1 - \frac{8v^2h}{gl^2}\right)$$

习题 3-5

1．求下列曲线的弧微分．

(1) $y = x^3 - x$；　(2) $y = e^x$；

(3) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$；　(4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

2．求下列曲线在指定点的曲率．

(1) 三次抛物线 $y = x^3$ 在点(1，1)处；

(2) 抛物线 $y = 4x - x^2$ 的顶点处；

(3) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 (x_0, y_0) 处．

3．求下列曲线在给定点的曲率半径．

(1) $y = x^2$，点(1，1)；

(2) $y = e^x$，点(0，1)；

(3) $y = \tan x$，点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$；

(4) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$，点(0，−1)．

4．求曲线 $y = \ln x$ 上曲率半径最小点，求出该点处的曲率半径．

5．证明曲线 $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ 在任何点处的曲率半径为 $\frac{1}{a}y^2$.

6．一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{4000}$（如图 3-32）作俯冲飞行，在原点 O 处的速度为 $V = 400\text{m/s}$，飞行员体重 65kg，求俯冲到原点时，飞行员对座椅的压力．

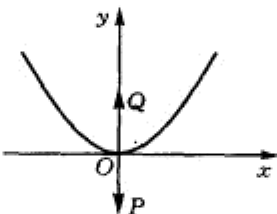


图 3-32

第四章 不定积分

在前三章中，讨论了一元函数微分学．自本章开始到第六章，我们将讨论一元函数的积分．一元函数积分学中有两个基本内容——不定积分与定积分．本章先讨论不定积分．

第一节 原函数与不定积分

微分学中讨论的基本问题是：已知函数 $f(x)$，如何求它的导数或微分，但在实际问题中，常会遇到与此相反的问题，即已知函数的导数或微分，如何求它原来的函数．例如，已知作变速直线运动的质点 M 在任一时刻 t 的瞬时速度 $v=s'(t)$，如何求该质点 M 的运动规律，即该质点 M 在数轴上的位置 s 与运动的时间 t 的函数关系：$s=s(t)$；又如，已知曲线上任一点 $P(x, y)$处的切线斜率为 $y'=f'(x)$，如何求此曲线的方程 $y=f(x)$．这些问题在数学上就是已知函数 $f(x)$，要求出可导函数$F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$，这就是本章要讨论的问题．为此，下面先引入原函数与不定积分的概念．

一、原函数与不定积分的概念

1．原函数的概念

定义 4.1 设 $f(x)$是定义在某区间 I 上的已知函数，如果存在可导函数 $F(x)$，使得对任一 $x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x) \text{或} \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数$F(x)$为 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数．

例如：

因为$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$上的原函数；

因为$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$，所以$\dfrac{x^3}{3}$是 x^2 在$(-\infty, +\infty)$上的原函数；

因为$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$，所以 $\arcsin x$ 是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$(-1, 1)$上的原函数．

如果函数 $f(x)$在区间 I 上的原函数存在，那么它有多少个原函数？

从上面已经看到，$\sin x$ 是 $\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$上的原函数，而由于$(\sin x$

$+1)'=\cos x$，$\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)'=\cos x$，$\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)'=\cos x$，…，$(\sin x+C)'=\cos x$（$C$ 是任意常数）等都是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数，即在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\cos x$ 的原函数可有无限多个.

一般地，如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间 I 上的一个原函数，则对于任意常数 C，都有

$$[F(x)+C]'=f(x),$$

由于常数 C 的任意性，从而可知，如果函数 $f(x)$ 在某区间 I 上存在原函数，则它的原函数可有无限多个.

那么，$f(x)$ 在某区间 I 上的任意两个不同的原函数之间有什么关系呢？下面给出一个定理.

定理 4.1　设函数 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间 I 上的任意两个原函数，则它们的差 $\Phi(x)-F(x)$ 在该区间 I 上是一个常数.

证　因为对于任一 $x\in I$，都有

$$\Phi'(x)=f(x),\ F'(x)=f(x),$$

所以

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由于导数恒为零的函数必为常数，故得

$$\Phi(x)-F(x)=C,$$

即有

$$\Phi(x)=F(x)+C\quad(x\in I),$$

其中 C 是某个常数.

由此可知，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

$$F(x)+C\quad(C\text{ 为任意常数}),$$

就是 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数的一般表达式.

下面再来引进不定积分的概念.

2. 不定积分的概念

定义 4.2　$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数

$$F(x)+C\quad(C\text{ 为任意常数}),$$

称为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.\tag{4.1}$$

其中，$f(x)$ 称为**被积函数**；$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**；x 称为**积分变量**；符号 $\int$ 称为**积分号**，任意常数 C 也称为**积分常数**.

由此可见，求不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$，只要求出被积函数$f(x)$在区间I上的某一个原函数$F(x)$，然后再加上一个任意常数C即可.

例 4.1 求$\int x^3\mathrm{d}x$.

解 因为$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$，所以$\frac{x^4}{4}$是$x^3$的一个原函数. 于是

$$\int x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C \quad (C\text{是任意常数}).$$

例 4.2 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 因为$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，所以$\arcsin x$是$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的一个原函数. 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

例 4.3 求$\int \sec^2 x\mathrm{d}x$.

解 因为$(\tan x)' = \sec^2 x$，所以$\tan x$是$\sec^2 x$的一个原函数. 于是

$$\int \sec^2 x = \tan x + C.$$

今后为了方便起见，不定积分也简称为**积分**，求不定积分的运算称为**积分法**.

3. 原函数与不定积分的几何意义

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$y = F(x)$在几何上表示xOy平面上的一条曲线，这条曲线称为$f(x)$的**积分曲线**. 而

$$y = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

当C取不同值时，就得到不同的积分曲线，它们可看作是由曲线$y = F(x)$沿y轴平行移动距离为$|C|$而得到的一族曲线，称此族曲线为$f(x)$的**积分曲线族**. 这族积分曲线具有这样的特点：在横坐标x相同的点处，曲线的切线都是平行的，且切线的斜率都等于$f(x)$，而它们的纵坐标只差一个常数.

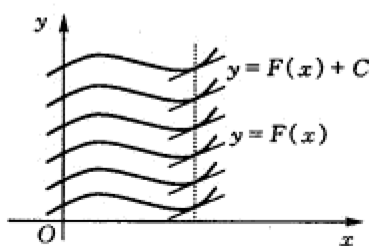


图 4-1

例 4.4 已知某曲线过点(0, 1)，且曲线上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线方程.

解 由题意可知，曲线上任一点(x, y)处的斜率为

$$y' = \frac{dy}{dx} = x.$$

由于$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$，所以$\frac{x^2}{2}$是 x 的一个原函数. 于是

$$y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

即
$$y = \frac{x^2}{2} + C, \tag{4.2}$$

其中 C 为任意常数，它的图形是一族抛物线，如图 4-2 所示. 要从这一族曲线中找出过(0, 1)的那一条，只要将 $x = 0$, $y = 1$ 代入式(4.2)，得

$$1 = 0 + C, \ C = 1.$$

于是得到所求的曲线方程为

$$y = \frac{x^2}{2} + 1.$$

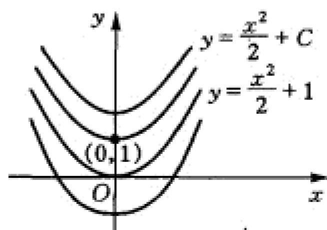


图 4-2

二、基本积分表

由前面所讨论的原函数与不定积分的概念，可以看到积分法是微分法的逆运算. 利用求导的公式，就可以得到相应的积分公式.

例 4.5　求$\int x^\mu dx (\mu \neq -1)$.

解　因为$(x^{\mu+1})' = (\mu + 1)x^\mu$，
所以

$$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu + 1}\right)' = x^\mu.$$

这说明$\frac{x^{\mu+1}}{\mu + 1}$是 x^μ 的一个原函数，因此

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu + 1} + C, \quad (\mu \neq -1).$$

例 4.6　求$\int \sin x dx$.

解　因为$(-\cos x)' = \sin x$，所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，故得

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

类似地有

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

例 4.7　求$\int a^x dx \ (a > 0, \ a \neq 1)$.

解 因为$(a^x)' = a^x \ln a$，所以

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x.$$

这说明$\frac{a^x}{\ln a}$是a^x的一个原函数，因此

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C .$$

例 4.8 求$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 由于：

当$x > 0$时，$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$；

当$x < 0$时，$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. 所以，当$x \neq 0$时，$\ln|x|$是$\frac{1}{x}$的一个原函数，故得

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

用类似的方法还可以得到其他一些积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常称为**基本积分表**.

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 为常数)；

(2) $\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ (μ 为常数且$\mu \neq -1$)；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$；

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

(11) $\int \cos x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(12) $\int e^x = dx = e^x + C$;

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a 为常数，$a > 0$，且 $a \neq 1$).

注 以上 13 个基本积分公式是求不定积分的基础，必须熟练掌握.

下面先应用幂函数的积分公式(2)，举几个求解不定积分的例子.

例 4.9 求$\int x^{99} dx$.

解 由公式(2) 得 $\mu = 99$,

$$\int x^{99} dx = \frac{1}{99+1} x^{99+1} + C = \frac{x^{100}}{100} + C.$$

例 4.10 求$\int \frac{1}{x^3} dx$.

解 由于$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$，由公式(2) 得

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

例 4.11 求$\int x^3 \sqrt{x} dx$.

解 $\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} dx + C = \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} + C.$

从上面例子可以看到，有时被积函数实际上是幂函数，但常用分式或根式表示. 遇到这类情形，应首先把它化为 x^μ 的形式，然后再应用幂函数的积分公式(2) 来求出不定积分.

三、不定积分的性质

根据不定积分的定义及求导运算法则，可以得到不定积分的下列性质(这里假定出现的不定积分均存在).

性质 4.1 微分运算与积分运算是互为逆运算.

(1) 因为$\int f(x) dx$ 是$f(x)$ 的任意一个原函数，所以

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx\right] = f(x) \quad 或 \quad d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx; \tag{4.3}$$

(2) 因为 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \quad 或 \quad \int dF(x) = F(x) + C. \tag{4.4}$$

此性质表明：当积分运算记号$\int$与微分运算记号 d 连在一起时，或者相互抵消，或者抵消后只差一个常数. 可以用“先积后微，形式不变；先微后积，差个

常数”这句口诀来帮助记忆.

特别地，当被积函数 $f(x)=1$ 时，有

$$\int \mathrm{d}x = x + C.$$

性质 4.2　被积函数中不为零的常数乘积因子可以提到积分号外，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ 是常数}, k \neq 0).$$

性质 4.3　两个函数的和(差)的不定积分等于两个函数的不定积分的和(差)，即

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质 4.2 和 4.3 的证明从略.

性质 4.3 对于被积函数为有限个函数的和(差)的情形也是成立的，即

$$\int (f_1(x) \pm \cdots \pm f_n(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int f_n(x)\mathrm{d}x,$$

这里，n 是有限的正整数.

利用不定积分的性质及基本积分表，将被积函数作适当的代数或三角恒等变形，就可求一些简单函数的不定积分.

例 4.12　求 $\int (2\mathrm{e}^x - 3\sin x + 5\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int (2\mathrm{e}^x - 3\sin x + 5\sqrt{x})\mathrm{d}x &= \int 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \int 3\sin x\mathrm{d}x + \int 5\sqrt{x}\mathrm{d}x \\ &= 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x - 3\int \sin x\mathrm{d}x + 5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= 2\mathrm{e}^x - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= 2\mathrm{e}^x + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

注　(1) 在分项积分后，虽然中间的几个不定积分都分别含有任意常数，但由于任意常数的代数和仍是任意常数，因此，只要在最后总的加上一个常数就行了；

(2) 如果检验积分计算是否正确，只要把积分结果求导，看它是否等于被积函数，如相等，就是正确的，否则，就是错误的.

例如，就例 4.12 的计算结果看，由于

$$\begin{aligned}\left(2\mathrm{e}^x + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C\right)' &= 2\mathrm{e}^x - 3\sin x + \frac{10}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ &= 2\mathrm{e}^x - 3\sin x + 5\sqrt{x},\end{aligned}$$

它恰好等于原积分的被积函数，所以上面的计算结果是正确的.

例 4.13　求$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$.

解　$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx &= \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx \\ &= \int\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\int x dx+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\ln|x|-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C \\ &= \frac{x}{6}+\frac{x}{3}-\ln|x|+\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

例 4.14　求$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

解　$$\begin{aligned}\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int \frac{1-2x^{\frac{1}{2}}+x}{x^{\frac{1}{3}}}dx \\ &= \int(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{2}{3}})dx \\ &= \int x^{-\frac{1}{3}}dx-2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-2\times\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.\end{aligned}$$

例 4.15　求$\int 2^x e^{x+1}dx$.

解　由于 $2^x e^{x+1} = 2^x e^x e = e(2e)^x$,

所以，　$$\int 2^x e^{x+1}dx = e\int(2e)^x dx = e\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C = \frac{2^x e^{x+1}}{1+\ln 2}+C.$$

例 4.16　求$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$.

解　先将被积函数变形后，得

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} = x^2-1+\frac{1}{x^2+1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2+1}dx &= \int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int x^2dx-\int dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.\end{aligned}$$

注　将有理假分式作代数的变形时，在分子上用“加1减1”的方法是常用的.

例 4.17　求$\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解　先利用三角恒等式：$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$，于是

$$\int \tan^2 x \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例 4.18　求$\int \cos^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

解　由 $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$，得

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

例 4.19　求$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$.

解　利用三角恒等式：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，得

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \tan x - \cot x + C.$$

习题 4-1

1. (1) $\int (\sqrt{x} + 2(\mathrm{d}x$；　　(2) $\int (1 - x^2)^3 \mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)} \mathrm{d}x$；　　(6) $\int (5^x + 7^x)\mathrm{d}x$；

(7) $\int 7^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$；　　(8) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} \mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$；　　(10) $\int \mathrm{e}^x \left(a^2 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \mathrm{d}x$.

2. 已知曲线上每一点切线的斜率都是 $x - 1 (x \in \mathbf{R})$，且该曲线过点$\left(1, \frac{1}{2}\right)$，求此曲线方程.

3. 若曲线 $y = f(x)$ 上点(x, y)的切线斜率与 x^3 成正比，且曲线过点(1, 6)与(2, -9)，求此曲线方程.

第二节 换元积分法

在上一节中，我们直接利用基本积分表中的公式和不定积分的性质，计算了一些简单的不定积分．但是仅靠这些能够计算的不定积分是非常有限的．因此，我们必须进一步研究不定积分的计算方法．

本节先介绍求不定积分的换元积分法．利用换元法，可以通过适当的变量代换，把某些不定积分化为基本积分表中所列积分的形式，从而可以求出不定积分．

换元积分法通常分为两类，下面先讲第一类．

一、第一类换元积分法

我们先分析一个例子．

例 4.20 求$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$．

分析 如果直接由基本积分表中公式(6)：$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$，得到

$$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\sin 2x+C.$$

那么，不难验证它是错误的．因为$(\sin 2x)'=2\cos 2x\neq\cos 2x$，所以

$$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x\neq\sin 2x+C.$$

解 由于$\cos 2x$是复合函数，设$u=2x$，则$\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)$，那么

$$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)\xlongequal{令\ u=2x}\frac{1}{2}\int\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{公式(6)}\frac{1}{2}\sin u+C\xlongequal{回代}\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

例 4.20 中所采用的变量代换方法，就是第一类换元法．下面我们来对第一类换元法作一般性的讨论．

定理 4.2 设函数$f(u)$具有原函数$F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则$F(\varphi(x))$是$f(\varphi(x))\varphi'(x)$的原函数，并有换元积分公式：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x\xlongequal{令\ u=\varphi(x)}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$$

$$\xlongequal{以\ u=\varphi(x)\ 回代}F[\varphi(x)]+C.\qquad(4.5)$$

证 因为$F(u)$是$f(u)$的原函数，$u=\varphi(x)$可导，而$F(\varphi(x))$可以看成是由函数$F(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成，故由复合函数的求导法则得

$$(F(\varphi(x)))' = F'(u)\varphi'(x) = f(u)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

所以 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的原函数，并有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

式(4.5) 中的另两个等式 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$ 显然成立，这就证明了定理 4.2.

公式(4.5) 称为不定积分的**第一类换元积分公式**. 它的作用在于：当所求不定积分的被积函数以复合函数形式出现时，如能把被积表达式变形为 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的形式，而把 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 凑成微分 $\mathrm{d}\varphi(x)$，则通过作变量代换 $u = \varphi(x)$，可把 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u$. 只要 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 容易积出，或可以直接由基本积分公式(把公式中的积分变量 x 换成 u) 求得，那么在求得的结果

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$$

中，再以 $u = \varphi(x)$ 代回还原到原积分变量 x，便可得到所求原不定积分的结果. 这种积分法的关键是把被积函数中的某一部分与 $\mathrm{d}x$ 凑微分，使被积表达式变成 $f(\varphi(x))\mathrm{d}(\varphi(x))$ 的形式，从而可以找出所需作的变量代换：$u = \varphi(x)$. 因此，第一类换元法也称为**凑微分法**.

例 4.21 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

解 因为 $\mathrm{d}(1+3x) = 3\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}(1+3x)$，所以可设变量代换：$u = 1 + 3x$，便得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+3x}} = \frac{1}{3}\int (1+3x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+3x) \xlongequal{令 u = 1+3x} \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{公式(2)} \frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}} + C$$

$$\xlongequal{以 u = 1+3x 代回} \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+3x)^2} + C.$$

例 4.22 求 $\int (a+bx)^n\mathrm{d}x \ (n \neq -1)$.

解 因为 $\mathrm{d}(a+bx) = b\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}(a+bx)$，所以可设变量代换：$u = a + bx$，便得

$$\mathrm{d}x(a+bx)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int (a+bx)^n\mathrm{d}(a+bx) \xlongequal{令 u = a+bx} \frac{1}{b}\int u^n\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{公式(2)}} \frac{1}{b}\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\xlongequal{\text{以 } u=a+bx \text{ 代回}} \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1}+C.$$

例 4.23　求$\int x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解　因为$\mathrm{d}(4-x^2)=-2x\mathrm{d}x$，$x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(4-x^2)$，所以

$$\int x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(4-x^2).$$

令$u=4-x^2$，便得

$$\int x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \xlongequal{\text{公式(2)}} -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\xlongequal{\text{以 } u=4-x^2 \text{ 代回}} -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+C.$$

例 4.24　求$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解　因为$\mathrm{d}x^2=2x\mathrm{d}x$，$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$，所以

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2.$$

令$u=x^2$，便得

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^u\mathrm{d}u \xlongequal{\text{公式(12)}} \frac{1}{2}e^u+C \xlongequal{\text{以 } u=x^2 \text{ 代回}} \frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

当对变量代换比较熟悉以后，运算过程就可以写得简单些，甚至把所设的变量代换$u=\varphi(x)$也可以不必写出，只要一边计算，一边在心中默记就行了.

例 4.25　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\int\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 4.26　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

在例 4.25 及例 4.26 中，实际上都用了变量代换：$u=\frac{x}{a}$，并在求出积分

$\int f(u)\mathrm{d}u$ 后，代回了原来的积分变量，只是没有具体写出这些步骤而已.

例 4.27 求$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，故$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$，所以

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

例 4.28 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+5\ln x)}$.

解 因为 $\mathrm{d}(1+5\ln x) = 5\frac{\mathrm{d}x}{x}$，故$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{5}\mathrm{d}(1+5\ln x)$，所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+5\ln x)} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+5\ln x)}{1+5\ln x} = \frac{1}{5}\ln|1+5\ln x| + C.$$

例 4.29 求$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}(x^2-3x+5) = (2x-3)\mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5} = \ln|x^2-3x+5| + C.$$

例 4.30 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-a^2} &= \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} \\ &= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} - \int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right] \\ &= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\end{aligned}$$

类似地可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

例 4.31 求$\int \frac{2^{\arcsin\sqrt{3}x}}{\sqrt{1-3x^2}}\mathrm{d}x$.

解　因为 $d(\arcsin\sqrt{3}x) = \dfrac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{1-3x^2}}$，所以，

$$\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}d(\arcsin\sqrt{3}x),$$

$$\int \frac{2^{\arcsin\sqrt{3}x}}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int 2^{\arcsin\sqrt{3}x}d(\arcsin\sqrt{3}x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\ln 2}2^{\arcsin\sqrt{3}x} + C.$$

下面再举一些有关三角函数积分的例子．在计算这些积分时，往往要用到一些三角恒等式．

例 4.32　求 $\int \tan x dx$.

解　$\int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

类似地可得

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$$

例 4.33　求 $\int \sin^3 x dx$.

解　$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$$= \int \cos^2 x d(\cos x) - \int d(\cos x)$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

例 4.34　求 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

解

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

例 4.35　求 $\int \sin^2 x dx$.

解　$\int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \dfrac{1}{2}(\int dx - \int \cos 2x dx)$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

例 4.36 求$\int \csc x\, dx$.

解 $$\int \csc x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

因为

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x,$$

所以上述不定积分又可表示为

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

例 4.37 求$\int \sec x\, dx$.

解 $$\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \int \csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

从上面所列举的例子中可以看到，第一类换元积分法在求不定积分中起到了非常重要的作用．要能准确而迅速地掌握这种积分方法，关键是要熟悉函数微分的运算及其变形．例如，$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$，$x dx = \frac{1}{2}dx^2$；$\cos x dx = d(\sin x)$，$\sin x dx = -d(\cos x)$；$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x)$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$等．此外，通过多做练习才能“熟能生巧”，逐步掌握求不同类型积分的方法和技巧．

二、第二类换元积分法

第一类换元积分法虽然使用得很广泛，但是对于求某些不定积分，例如

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x+1}}$$

等就不一定能适用. 下面来介绍第二类换元法. 先看一个例子.

例 4.38　求$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　作变量代换, 把被积函数的根号去掉. 令$\sqrt{x} = t$, 即 $x = t^2$. 于是

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+t}, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(t^2) = 2t\mathrm{d}t.$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &\xlongequal[(\sqrt{x}=t)]{x=t^2} \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right] = 2[t - \ln|1+t|] + C \\ &\xlongequal{\text{以 } t=\sqrt{x} \text{ 代回}} 2[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C.\end{aligned}$$

一般地, 若积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 不易求得, 如果能适当地选择变量代换: $x = \Psi(t)$, 把原积分化为积分$\int f(\Psi(t)\Psi'(t)\mathrm{d}t$, 而后者却比较容易积出, 那么最后只要把结果中的 t 作变量回代, 即以函数 $x = \Psi(t)$ 的反函数 $t = \Psi^{-1}(x)$ 代回就可以了, 将这种过程一般化, 就是

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{令} x=\Psi(t)} \int f[\Psi(t)]\Psi'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{求积分}} \Phi(t) + C \\ &\xlongequal[(t=\Psi^{-1}(x))]{\text{变量回代}} \Phi[\Psi^{-1}(x)] + C.\end{aligned}$$

综上所述, 归纳为下面的定理.

定理 4.3　设 $x = \Psi(t)$ 是单调可微的函数, 且 $\Psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\Psi(t)]\Psi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$, 则 $\Phi[\Psi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数(其中 $t = \Psi^{-1}(x)$ 是 $x = \Psi(t)$ 的反函数), 即有**第二类换元积分公式**:

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{令} x=\Psi(t)} \int f[\Psi(t)]\Psi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t) + C \\ &\xlongequal{\text{令 } t=\Psi^{-1}(x) \text{ 回代}} \Phi[\Psi^{-1}(x)] + C.\end{aligned} \tag{4.6}$$

证　令 $F(x) = \Phi[\Psi^{-1}(x)]$, 利用复合函数求导法则及反函数的求导公式, 得到

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f[\Psi(t)]\Psi'(t)\frac{1}{\Psi'(t)} = f[\Psi(t)] = f(x),$$

即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 于是有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C = \Phi[\Psi^{-1}(x)] + C.$$

由于 $\Phi(t)$ 是 $f[\Psi(t)]\Psi'(t)$ 的原函数，$t=\Psi^{-1}(x)$，因此式(4.6)中的另两个等式 $\int f[\Psi(t)]\Psi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C=\Phi[\Psi^{-1}(x)]+C$ 显然成立．这就证明了定理 4.3.

这个定理表明，对于积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，通过变量代换 $x=\Psi(t)$，可化为 $\int f[\Psi(t)]\Psi'(t)\mathrm{d}t$．如果后者对新变量的积分容易积出，那么积分后再把 t 换为 $x=\Psi(t)$ 的反函数 $\Psi^{-1}(x)$ 就行了．下面举例说明第二类换元积分公式(4.6)的应用.

例 4.39 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt[3]{x+1}=u$，则 $x=u^3-1$，$\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+u}3u^2\mathrm{d}u = 3\int \frac{u^2-1+1}{1+u}\mathrm{d}u\\ &= 3\int(u-1)\mathrm{d}u+3\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u\\ &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C.\end{aligned}$$

例 4.40 求 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt[6]{x}=u$，则 $u=x^6$，$\mathrm{d}x=6u^5\mathrm{d}u$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int\frac{6u^5\mathrm{d}u}{u^2+u^3} = 6\int\frac{u^3}{1+u}\mathrm{d}u = 6\int\frac{u^3+1-1}{1+u}\mathrm{d}u\\ &= 6\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\ &= 6\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln(1+u)\right]+C\\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.\end{aligned}$$

例 4.41 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 被积函数中有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，为了化去这个根式，我们可以利用三角恒等式

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1$$

来达到目的.

设 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t.$$

于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int a\cos t a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C.$$

由于 $x = a\sin t$，$\sin t = \frac{x}{a}$，所以

$$t = \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

因此所求的积分为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 4.42　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}(a > 0)$.

解　类似于上例，可以利用三角恒等式

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

来化去根式.

设 $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$,

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2 t} = a\sec t.$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\,\mathrm{s4ec}^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t,$$

利用例 4.37 的结果，便得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C_1,$$

其中 C_1 是任意常数.

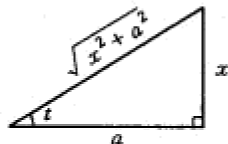


图 4-3

为了把 $\sec t$ 及 $\tan x$ 换成 x 的函数，可根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 作一个辅助的直角三角形(图 4-3)，按边角关系可得

$$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$ 仍是任意常数.

例 4.43 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解 为了消去被积函数中的根式，可设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t}{\sqrt{a^2\sec^2t-a^2}}\mathrm{d}t=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

为了把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，可根据 $\sec t=\frac{x}{a}$ 作辅助直角三角形(图 4-4) 得到

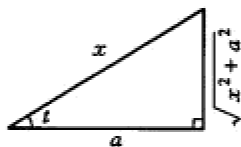


图 4-4

$$\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$ 仍是任意常数.

上面 3 个例子中所用的方法称为**三角函数代换法**(简称**三角代换**).

一般地，如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，可以作代换 $x=a\sin t$ 化去根式；如果被积函数中含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，可以作代换 $x=a\tan t$ 化去根式；如果被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，可以作代换 $x=a\sec t$ 化去根式. 具体解题时要分析被积函数的具体情况，有时可以选取更为简捷的代换.

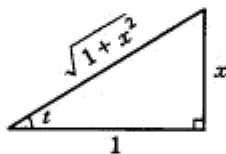


图 4-5

例 4.44 求 $\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\ (x>0)$.

解法一 令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\,\mathrm{d}t$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t$. 于是

$$\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\tan t\sec t}\sec^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \csc t\,\mathrm{d}t = \ln|\csc t - \cot t| + C.$$

由于 $x = \tan t$，作辅助直角三角形(图 4-5)，可得

$$\cot t = \frac{1}{x},\ \csc t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

注　由于题设中 $x>0$，且 $\sqrt{1+x^2}-1>0$，故在上述结果中的“ln”后面可以去掉绝对值号.

解法二　令 $x = \frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，代入原积分得

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = -\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C$$

$$= -\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + C = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

解法三　令 $\sqrt{1+x^2} = t$，则 $1+x^2 = t^2$，$x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t^2-1)t}t\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1} + C\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2} + C$$

$$= \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

三、基本积分表的扩充

在本节所举的例中，有几个积分是我们以后经常会遇到的，所以它们通常也被当作公式使用. 这样在 4.1 的基本积分表中的公式又可以扩充下面几个：

(14) $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

(15) $\int \cot x \mathrm{d}x = -\ln|\sin x| + C$;

(16) $\int \sec x \mathrm{d}x = -\ln|\sec x + \tan x| + C$;

(17) $\int \csc x \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$;

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

(19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

(20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

(21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

(22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$;

(23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$.

例 4.45 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 8}$.

解 将分母中 x 的二次项与一次项配成完全平方，得

$$x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x + 4) + 4 = (x-2)^2 + 2^2.$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{(x-2)^2 + 2^2},$$

利用公式(18)，便得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 8} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C.$$

例 4.46 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 2}$.

解 与上题类似，配方得

$$x^2 + 4x + 2 = (x^2 + 4x + 4) - 2 = (x+2)^2 - (\sqrt{2})^2,$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2 - (\sqrt{2})^2},$$

利用公式(19)，便得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x + 2 - \sqrt{2}}{x + 2 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

例 4.47　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

解　将根号内的二次三项式配方得

$$3-2x-x^2=4-(x^2+2x+1)=2^2-(x+1)^2,$$

利用公式(21)，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

例 4.48　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+4}}$.

解　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+4}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3x)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3x)}{\sqrt{(3x)^2+2^2}}$,

利用公式(22)，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+4}}=\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2+4})+C.$$

一般地，对于$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$或$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$($a\neq 0$)型的积分，可将分母中的二次三项式配方，把积分化成积分表中已有的积分形式.

习题 4-2

1. 利用凑微分法求下列函数的不定积分.

(1) $\int \sqrt{3+4x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-3}$;　　(4) $\int \mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{1}{\sin^2 3x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \tan(2x-5)\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+3}}$;　　(8) $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(4+x^3)^2}$;　　(10) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$;

(11) $\int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int \mathrm{e}^x\sin\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{\ln(\ln)x}{x\ln x}\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(17) $\int \frac{\sec^2 \frac{1}{x}}{x^2} dx$; (18) $\int \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;

(19) $\int 10^{-3x+2} dx$; (20) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx$;

(21) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$; (22) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+\tan x}} dx$;

(23) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$; (24) $\int \cos^4 x dx$;

(25) $\int \tan^4 x dx$; (26) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

(27) $\int \frac{dx}{1+(2x-3)^2}$; (28) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$;

(29) $\int \frac{\cot\theta}{\sqrt{\sin\theta}} d\theta$; (30) $\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x} dx$.

2. 利用第二类换元积分法求下列函数的不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; (2) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$; (4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$; (6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$;

(7) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx \quad (a>0)$; (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$;

(9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; (10) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} dx$;

(11) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} dx$; (12) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

(13) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$; (14) $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+11} dx$;

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

第三节 分部积分法

上节介绍的换元积分法是在复合函数求导公式的基础上得到的. 虽然它是一种应用范围很广的积分方法, 但是当被积函数是两个不同类型函数的乘积时, 例如

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x,\ \int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,\ \int x\arctan x\,\mathrm{d}x$$

等，换元积分法就不一定有效．在本节中，我们将利用两个函数乘积的微分公式，推得另一种求积分的基本方法 —— **分部积分法**．

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续导数，由于

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v,$$

所以

$$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - u\mathrm{d}u,$$

于是

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u. \tag{4.7}$$

公式(4.7) 称为**分部积分公式**．

这个公式的作用在于：如果左端的积分 $\int u\mathrm{d}v$ 不易求得，而右端的积分 $\int v\mathrm{d}u$ 比较容易求得，那么利用这个公式就可以起到化难为易的作用．

一般地说，选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 的原则如下：

(1) $\mathrm{d}v$ 要容易凑成；

(2) $\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易求出．

例 4.49 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$．

解 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$

例 4.50 求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$．

解 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x 2x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

这里 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 比 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 容易求积分，因为被积函数中的幂次前者比后者降低了一次．对 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 再使用一次分部积分法：

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C'$$

所以

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C\\ &= \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

例 4.51 求 $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$．

解 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}\cos x = -x\cos x + \sin x + C',$

所以

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$$
$$= x^2\sin x + 2(x\cos x - \sin x) + C.$$

从上面的几个例子可以看出，如果被积函数是幂函数与正(余)弦函数或指数函数的乘积，那么，就可以考虑使用分部积分法，并设幂函数为 u. 这样通过使用一次分部积分法，就可以使幂函数的幂次降低一次.

例 4.52　求 $\int x^2\ln x\,dx$.

解　$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}\int \ln x\,dx^3 = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

例 4.53　求 $\int \arcsin x\,dx$.

解　设 $u = \arcsin x$, $dv = dx$，则

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$
$$= x\arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 4.54　求 $\int x\,\mathrm{arccot}\,x\,dx$.

解　$$\int x\,\mathrm{arccot}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{arccot}\,x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

例 4.55　求 $\int \ln^2 x\,dx$.

解　$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\,d\ln^2 x = x\ln^2 x - \int x\frac{2\ln x}{x}dx$$
$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx.$$

对积分 $\int \ln x\,dx$ 再用一次分部积分法

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C',$$

所以

$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C.$$

从上面的几个例子可以看出，如果被积函数是幂函数与对数函数或反三角函数的乘积，那么，也可以考虑用分部积分法，并设对数函数或反三角函数为 u.

例 4.56　求$\int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x$.

解　$$\int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x = -\int e^{-x}\mathrm{d}\cos x = -e^{-x}\cos x - \int(-\cos x)(-e^{-x})\mathrm{d}x$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x \mathrm{d}x.$$

等式右端的积分与左端的积分是同一类型，对右端的积分再用一次分部积分法

$$\int e^{-x}\cos x \mathrm{d}x = \int e^{-x}\mathrm{d}\sin x = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x,$$

所以

$$\int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x$$
$$= -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x.$$

由于上式右端保留的积分项就是所求的积分$\int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x$，把它移到等式左端合并后，再两端同除以 2，最后总的加上一个任意常数 C，便得所求的积分为

$$\int e^{-x}\sin x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C.$$

例 4.57　求$\int \sec^3 x \mathrm{d}x$.

解　$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d}\tan x = \sec\tan x - \int \sec x \tan^2 x \mathrm{d}x$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x.$$

由于
$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C',$$

所以

$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \mathrm{d}x.$$

仿照上例方法，移项合并并除以 2，得

$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$$

从上面的例子可以看到，有些不定积分经过分部积分后，虽然未能求出该积分，但又出现了与所求积分具有相同形式的项．这时可以从等式中像解代数方程那样，解出所求的积分来．

例 4.58 求$\int(3x^2-1)\ln x\mathrm{d}x$．

解
$$\begin{aligned}\int(3x^2-1)\ln x\mathrm{d}x &= \int\ln x\mathrm{d}(x^3-x) = (x^3-x)\ln x-\int\frac{x^3-x}{x}\mathrm{d}x\\ &= (x^3-x)\ln x-\int(x^2-1)\mathrm{d}x\\ &= (x^3-x)\ln x-\frac{x^3}{3}+x+C.\end{aligned}$$

在求积分的过程中，往往要兼用换元法与分部积分法，下面看一个例子．

例 4.59 求$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$．

解 先用换元法．设$\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}=t$，则$x=t^3$，$\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$．于是
$$\int\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$
再用分部积分法，由例 4.50 可知
$$\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t(t^2-2t+2)+C',$$
所以
$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= 3\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=3\mathrm{e}^t(t^2-2t+2)+C\\ &= 3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.\end{aligned}$$

例 4.60 求$\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$．

解 由于被积函数是三个函数的乘积：$x\arctan x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，所以，对被积表达式要连续两次凑微分，才能使用分部积分法．
$$\begin{aligned}\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)\\ &= \int\arctan x\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}\\ &= \sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}\arctan x\\ &= \sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

例 4.61　求$\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$.

解　先用凑微分法，再用分部积分法.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \ln(1+x)d\sqrt{x}\\ &= 2\sqrt{x}\ln(1+x) - 2\int \sqrt{x}\,d\ln(1+x)\\ &= 2\sqrt{x}\ln(1+x) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.\end{aligned}$$

求不定积分$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$，用第二换元法. 令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2t\,dt$，于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\ &= 2(t-\arctan t)+C = 2(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C'\end{aligned}$$

所以

$$\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - 4(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}) + C.$$

习题 4-3

1. 求下列函数的不定积分.

(1) $\int x\sin x\,dx$；　(2) $\int \ln x\,dx$；

(3) $\int\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)e^x dx$；　(4) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$；

(5) $\int x^2\arctan x\,dx$；　(6) $\int (x^2-5x+7)\cos 2x\,dx$；

(7) $\int x^2e^{3x}dx$；　(8) $\int \sin(\ln x)dx$；

(9) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$；　(10) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；

(11) $\int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx$；　(12) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$；

(13) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(14) $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$；

(15) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，证明

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C.$$

第四节　有理函数及三角函数有理式的积分法

前面介绍的换元法与分部积分法是求不定积分的基本方法. 灵活运用这些方法, 可以求得许多初等函数的不定积分. 本节我们将讨论某些特殊类型的函数的不定积分的求法.

一、有理函数积分法

1. 把有理真分式化为部分分式之和

由两个多项式的商表示的函数, 即形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} \tag{4.8}$$

的函数, 称为有理函数或有理分式, 其中 m 和 n 都是非负整数; a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 及 b_0, b_1, b_2, $\cdots$, b_m 都是实数, 且 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. 例如

$$\frac{3x+2}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x^2+3x+2}, \quad \frac{x^3+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{x^2}{x^2-1}$$

都是 x 的有理函数. 在今后的讨论中, 我们对有理分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 总是假定它的分子 $P(x)$ 与分母 $Q(x)$ 之间是没有公因式的, 这种有理分式称为**既约分式**. 当有理分式(4.8) 的分子多项式的次数 n 低于其分母多项式的次数 m, 即 $n < m$ 时, 称该有理分式是**真分式**; 反之, 当 $n \geqslant m$ 时, 称该有理分式为**假分式**. 例如, 上面列举的四个分式中, 前两个是真分式, 后两个是假分式.

任何一个假分式, 总可以用多项式的除法, 把它化成一个多项式与一个真分式之和. 例如, 上面的后两个假分式可以写成

$$\frac{x^3+1}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2}{x^2+x+1},$$

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}.$$

多项式的积分已经会求, 于是只需讨论真分式的积分法.

由代数学知道, 一个真分式总可以按分母的因式, 分解成若干个简单分式之代数和, 其中每个简单分式称为**部分分式**.

把一个有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成部分分式之和时, 可按下列法则来确定它的形式.

(1) 如果 $Q(x)$ 的分解式中含有单重一次因式 $x=a$，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的分解式中将含有形如

$$\frac{A}{x-a}$$

的项，其中 A 是待定的系数.

(2) 如果 $Q(x)$ 的分解式中含有 k $(k>1)$ 重一次因式$(x-a)^k$，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的分解式中将含有下列形式的 k 个项的和

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

其中 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 都是待定的常数.

(3) 如果 $Q(x)$ 的分解式中含有单重二次质因式 $x^2+px+q(p^2-4q<0)$，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的分解式中将含有一个形如

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

的项，其中 M 与 N 是待定的常数.

(4) 如果 $Q(x)$的分解式中含有 l $(l>1)$ 重二次质因式$(x^2+px+q)^l(p^2-4q<0)$，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的分解式中将含有下列形式的 l 个项的和

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_1x+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

其中 M_1，N_1，M_2，N_2，$\cdots$，M_l，N_l 都是待定的常数.

例 4.62　将真分式$\dfrac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}$分解成部分分式之和.

解　因为分母 $Q(x)=x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2)$，其中 $x-1$，$x-2$，$x+2$ 都是单重的一次因式，故按上述法则，所给的真分式可以分解成下列形式的部分分式之和：

$$\frac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

其中，A，B，C 都是待定的常数. 下面我们利用所谓**待定系数法**来确定这些待定的常数.

方法一　(比较系数法)

将上式两端同乘以$(x-1)(x-2)(x+2)$，去分母后得

$$2x^2+9x-14=A(x-2)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-2) \tag{4.9}$$

或

$$2x^2+9x-14=(A+B+C)x^2+(B-3C)x-(4A+2B-2C).$$

这是一个恒等式，等式两端 X 的同次幂的系数和常数项必须分别相等．于是有

$$\begin{cases} A+B+C=2, \\ B-3C=9, \\ 4A+2B-2C=14. \end{cases}$$

解得

$$A=1,\ B=3,\ C=-2.$$

故得

$$\frac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+2}.$$

方法二　（赋值法）

因为式(4.8)是恒等式，它对于任何的的值代入后，等式都应成立．在式(4.8)中：

令 $x=1$，代入得 $-3=-3A$，$A=1$；

令 $x=2$，代入得 $12=4B$，$B=3$；

令 $x=-2$，代入得 $-24=12C$，$C=-2$.

于是同样得到上面的结果．

例 4.63　将真分式 $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ 分解成部分分式之和．

解　因为分母 $Q(x)=x(x-1)^3$，其中 x 是单重一次因式，$(x-1)^3$ 是三重一次因式，故按上述法则，所给的真分式可以分解成下列形式的部分分式之和：

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3},$$

其中，A，B，C，D 都是待定的常数．为了确定这些常数．可将上式两端同乘以 $x(x-1)^3$，去分母后得恒等式：

$$\begin{aligned} x^3+1 &= A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx \\ &= (A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A. \end{aligned}$$

比较两端 x 的同次幂项系数及常数项应分别相等，应有

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 3A+2B-C=0, \\ 3A+B-C+D=0, \\ -A=1. \end{cases}$$

解得

$$A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2.$$

故得

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

例 4.64　将真分式$\frac{x+4}{x^3+2x-3}$分解成部分分式之和.

解　因为分母 $Q(x)=x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$，其中 $x-1$ 是单重一次因式，$x^2+x+3(p^2-4q=1^2-4\times 3<0)$是单重二次质因式，故按上述法则，所给的真分式可以分解成如下的形式：

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+3},$$

其中，A，B，C 为待定的常数. 为了确定这些常数. 将上式两端同乘以$(x-1)(x^2+x+3)$，去分母后得恒等式：

$$\begin{aligned}x+4&=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-1)\\&=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(3A-C).\end{aligned}$$

比较两端 x 的同次幂的系数及常数项，应有

$$\begin{cases}A+B=0,\\A-B+C=1,\\3A-C=4.\end{cases}$$

解得

$$A=1,\ B=-1,\ C=-1.$$

于是

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}.$$

例 4.65　将真分式$\frac{x^4+2x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}$分解成部分分式之和.

解　因为分母 $Q(x)=x(x^2+1)^2$，其中 x 是单重一次因式，$(x^2+1)^2$ 为二重的二次质因式，故按上述法则，所给的真分式可以分解成如下的形式：

$$\frac{x^4+2x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

其中，A，B，C，D，E 都是待定的常数. 为了确定这些常数. 将上式两端同乘以 $x(x^2+1)^2$，去分母后得恒等式：

$$x^4+2x^2-x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x.$$

先令 $x=0$，代入上式得 $A=1$.

再将 $A=1$ 代入上式，移项并化简后，得

$$-1=(Bx+C)(x^2+1)+(Dx+E)=Bx^3+Cx^2+(B+D)x+(C+E).$$

比较两端 x 的同次幂的系数及常数项，应有

$$B=0,\ C=0,\ B+D=0,\ C+E=-1,$$

从而有

$$B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=-1.$$

于是

$$\frac{x^4+2x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

注 本例中使用待定系数法确定待定常数时，同时使用了赋值法与比较系数法.

2. 有理真分式的积分

从以上讨论可知，有理真分式的积分不外乎有下面四种形式.

(1) $\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x$；

(2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$ ($n\neq1$，n 为正整数)；

(3) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ ($p^2-4q<0$)；

(4) $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$ ($n\neq1$，n 为正整数，且 $p^2-4q<0$).

综合上面的讨论可以小结如下：有理函数可化为多项式(整函数) 与真分式之和，从理论上讲，真分式又总可以分解为部分分式之和，而归纳为上述四种类型的积分. 这四种类型的积分总是存在的，因此可得出结论：**有理函数的原函数都是初等函数**. 在这个意义下，可以说有理函数的积分总是可积的.

下面举几个求有理真分式的积分的例子.

例 4.66 求$\int\frac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}\mathrm{d}x$.

解 由例 4.62 可知

$$\frac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2+9x-14}{x^3-x^2-4x+4}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\\&=\ln|x-1|+3\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C\\&=\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)^3}{(x+2)^2}\right|+C.\end{aligned}$$

例 4.67 求$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$.

解 由例 4.63 可知

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right]\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+2\int\frac{1}{(x-1)^3}\\&=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.\end{aligned}$$

例 4.68　求$\displaystyle\int\frac{x+4}{x^3+2x-3}$.

解　由例 4.64 可知

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x+4}{x^3+2x-3}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+x+3}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

右端第一项积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\ln|x-1|+C_1;$$

右端第二项积分

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2+x+3}\mathrm{d}x&=\int\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+3}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+3)}{x^2+x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+3|+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+C_2\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+3|+\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C_2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{x+4}{x^3+2x-3}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+x+3}\\&=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+3|-\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C.\end{aligned}$$

从上面几个例子可以看出，求有理真分式的积分步骤如下：

(1) 将有理真分式分解成部分分式之和；

(2) 对各个部分分式逐项积分.

下面，我们来举一个有理假分式积分的例子.

例 4.69 求 $\int \frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数是个假分式，故首先把它化成一个多项式与一个真分式之和，利用多项式除法：

$$
\begin{array}{r}
x+1 \qquad\qquad (\text{商}) \\
x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \,\overline{)\, x^5 - x^4 \qquad\qquad -3x+5} \\
-\quad x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x \qquad \\
\hline
x^4-2x^3+2x^2-4x+5 \\
-\quad x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\
\hline
-2x+4(\text{余式})
\end{array}
$$

从而得到

$$\frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = x + 1 + \frac{-2x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}.$$

将分母分解因式，得

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1).$$

因此，上式右端的真分式可表示为

$$\frac{-2x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{-2x + 4}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

(1) 将真分式化为部分分式之和.

设

$$\frac{-2x + 4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1},$$

其中 A，B，C，D 为待定常数. 将上式去分母，得

$$-2x + 4 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (x-1)^2(Cx+D)$$

或 $$-2x + 4 = (A + C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (A + C - 2D)x + (-A + B + D).$$

比较等式两端 x 的同次幂项的系数及常数项，得

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -A + B - 2C + D = 0, \\ A + C - 2D = -2, \\ A + B + D = 4. \end{cases}$$

从而解得

$$A=-2,\ B=1,\ C=2,\ D=1.$$

所以

$$\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

(2) 逐项积分.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\mathrm{d}x&=\int(x+1)\mathrm{d}x+\int\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\mathrm{d}x\\&=\int(x+1)\mathrm{d}x+\int\left[\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x\\&=\int(x+1)\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\&=\frac{1}{2}(x+1)^2-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+1)+\arctan x+C\\&=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2}+\arctan x+C.\end{aligned}$$

最后我们指出，上面所讲的只是有理函数积分的一般方法．如果有理函数比较复杂，分解成部分分式及逐项积分的计算往往都是比较麻烦的．因此在解题时，应尽量考虑有无其他简便的方法，只有在不得已时，采用一般方法．

例 4.70　求$\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}\mathrm{d}x$.

解　本题如果用一般方法求解，应将$\frac{x^2}{(x-1)^{10}}$化为部分分式，设

$$\frac{x^2}{(x-1)^{10}}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\cdots+\frac{A_{10}}{(x-1)^{10}}.$$

要定出待定系数 A_1，A_2，…，A_{10}，这显然是比较麻烦的．

若令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$．

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}\mathrm{d}x&=\int\frac{(t+1)^2}{t^{10}}\mathrm{d}t=\int\frac{t^2+2t+1}{t^{10}}\mathrm{d}xt\\&=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^8}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^9}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^{10}}\\&=-\frac{1}{7t^7}-\frac{1}{4t^8}-\frac{1}{9t^9}+C\\&\xlongequal{(以\ t=x-1\ 代回)}-\frac{1}{7(x-1)^7}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{9(x-1)^9}+C.\end{aligned}$$

二、三角函数有理式的积分法

所谓三角函数的有理式，是指由三角函数和常数，经过有限次四则运算所构成的式子，例如

$$\frac{\sin x}{1+\cos x},\ \frac{\cos x}{\sin x+\tan x},\ \frac{1}{5+4\sin 2x}$$

等都是三角函数的有理式，而 $\sqrt{\sin x}+\tan x$ 就不是三角函数的有理式.

因为 $\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$ 都可用 $\sin x$，$\cos x$ 来表示，所以我们可以把三角函数的有理式记作 $\mathbf{R}(\sin x, \cos x)$，其中 $\mathbf{R}$ 是有理式的符号.

下面我们证明，三角函数的有理式的积分

$$\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x,$$

总可以用代换 $u=\tan\frac{x}{2}$，即 $x=2\arctan u$ 化为 u 的有理函数的积分.

事实上，因为

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

又由 $x=2\arctan u$，得 $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，

所以

$$\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \mathbf{R}\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

上式右端是 u 的有理函数的积分，由上一节的讨论可知，u 的有理函数的积分总是存在的，其原函数是初等函数，因此，三角函数有理式的积分总是存在的，其原函数也是初等函数.

变量代换 $u=\tan\frac{x}{2}$ 通常称为“万能代换”，这个名称的来源意味着：任何三角函数有理式的积分，都可以用这种代换化为可积的有理函数的积分.

例 4.71 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

解　设 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du$．于是

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{2du}{3+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

例 4.72　求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$．

解　设 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du$．于是

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\frac{2du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+2u+u^2}{u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}+2+u\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|u|+2u+\frac{1}{2}u^2\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

例 4.73　求 $\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}$．

解　令 $2x=t$，则 $dx=\frac{1}{2}dt$，原积分化为

$$\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{5+4\sin t}$$

再令 $u=\tan\frac{t}{2}$，则 $\sin t=\frac{2u}{1+u^2}$，$dt=\frac{2du}{1+u^2}$．于是

$$\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{5+4\sin t}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{5+4\frac{2u}{1+u^2}}$$

$$=\int\frac{du}{5u^2+8u+5}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^2+\frac{8}{5}u+1}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{3}{5}}\arctan\left[\frac{u + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5u + 4}{3}\right) + C.$$

因为

$$u = \tan\frac{t}{2} = \tan x.$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5 + 4\sin 2x} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5\tan x + 4}{3}\right) + C.$$

注　利用“万能代换”$u = \tan\frac{x}{2}$，虽然可以把三角函数的有理式的积分化为 u 的有理函数的积分，但有时计算积分比较麻烦. 因此，对于某些特殊的三角函数有理式的积分，常常要采用其他形式的代换，以便更简便而迅速地得出结果.

例 4.74　求$\int \frac{\sin^5}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解　如果设 $u = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$，$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$，$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + u^2}\mathrm{d}u$，代入原积分，就变成

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = 2^6\int \frac{u^5\mathrm{d}u}{(1 + u^2)^2(1 - u^2)^4}.$$

这个关于 u 的有理函数的积分计算是比较麻烦的. 如果我们改用另一种代换：令 $t = \cos x$，则可比较简便地得到

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cos x) = -\int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -\int \frac{(1 - t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t = -\int\left(1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

习题 4-4

1. 求下列函数的不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$;

(2) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

(3) $\int \frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}dx$;

(4) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$;

(5) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

(6) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$;

(7) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}dx$;

(8) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$;

(9) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(10) $\int \frac{3x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

2. 求下列函数的不定积分.

(1) $\int \frac{1}{2+\sin x}dx$;

(2) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$;

(4) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

(5) $\int \frac{2-\sin x}{2+\sin x}dx$;

(6) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$;

(7) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

第五章　定积分

定积分是一元函数积分学中的另一个基本内容，它在科学技术与工程问题中有着广泛的应用. 在本章中，我们将从实际问题出发引出定积分的概念，然后讨论它的性质及计算方法，最后作为定积分的推广，还将介绍广义积分的概念.

第一节　定积分的概念和性质

定积分概念和其他数学概念一样，它的产生也是有其实际背景的. 下面先讨论几个实际问题的例子，从而抽象出定积分的概念.

一、引入定积分的两个实例

引例 5.1　曲边梯形的面积

在平面曲线围成的图形中，有一种较为简单的图形：它有三条边是直线段，其中两条互相平行，第三条与前面两条垂直叫作底边，第四条是一条曲线弧叫做曲边，这样的图形称为曲边梯形，如图 5-1 所示.

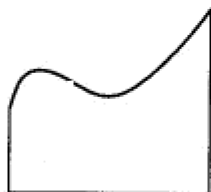


图 5-1

如何定义并计算曲边梯形的面积呢？下面来讨论这个问题.

设在直角坐标系 xOy 中，曲边梯形 $ABCD$ 是由连续曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$）、底边 x 轴及与底边垂直的两条直线 $x=a$，$x=b$ 所围成(图 5-2)，试求它的面积 A.

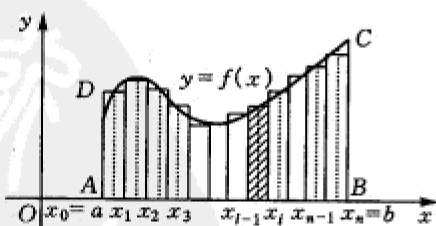


图 5-2

现在的曲边梯形有一条边是曲线，使得曲边梯形的高是变化的，那么能否设法创造条件，用“不变代变”使矛盾得到转化呢？为此，我们用许多平行于 y 轴的直线把曲边梯形分割成许多窄曲边梯形. 对于每个窄曲边梯形，由于它的底边很短，曲边 $f(x)$ 又是连续变化的，所以它的高度变化不大，可以把高度近似地看成不变而是一个常数. 这样，每一个窄曲边梯形的面积可以用一个同底的窄矩形面积来近似地代替，把所有这些窄矩形面积加起来，就得到整个曲边梯形面积的近似值. 显然，分割得越细，所得的近似

值就越接近于曲边梯形面积. 因此, 当无限细分(即每个窄矩形的底边长都趋于零)时所得的近似值的极限, 就是曲边梯形面积的精确值.

根据以上分析, 可具体地归结为以下四步.

(1) **分割**　在区间$[a, b]$上任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间$[a, b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 小区间长度依次记为:

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形(图5-2)这些窄曲边梯形的面积依次记为:

$$\Delta A_i(i=1, 2, \cdots, n).$$

则整个曲边梯形的面积为:

$$A=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i.$$

(2) **取近似**　在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$, 以 $f(\xi_i)$ 为高, Δx_i 为底的窄矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x$, 作为相应的窄曲边梯形的面积 ΔA_i 的近似值, 即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

(3) **作和**　把上面 n 个窄曲边梯形面积的近似值加起来, 就得到所求曲边梯形面积 A 的近似值, 即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) **取极限**　为了保证所有小区间的长度都无限小, 只需要求所有小区间长度中的最大值趋于零. 若记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$, 对上式右端和式取极限, 即得曲边梯形面积 A 的精确值为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

引例 5.2　变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v=v(t)$ 是在时间间隔$[T_1, T_2]$上 t 的连续函数, 且 $v(t)\geqslant 0$, 要计算在这段时间内物体所经过的路程 S.



图 5-3

物体在作变速直线运动时就不能像匀速直线运动那样用速度乘时间求其路

程，因为速度是变化的，但是，由于速度是连续变化的，只要 t 在$[T_1, T_2]$内某点处变化很小，相应的速度 $v = v(t)$ 也就变化不大. 因此，完全可以用类似于求曲边梯形面积方法来计算路程 S.

(1) **分割**　任取分点 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$ 把$[T_1, T_2]$分成 n 个小段$[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，每小段长为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) **取近似**　把每小段长为$[t_{i-1}, t_i]$上的运动视为匀速，任取时刻 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ 作乘积 $v(\xi_i)\Delta t_i$，显然这小段时间所走路程可近似表示为

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3) **作和**　把 n 个小段时间上的路程相加，就得到总路程 S 的近似值，即.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

(4) **取极限**　当 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta t_i\} \to 0$ 时，上述总和的极限就是 S 的精确值，即

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

二、定积分的定义

上面我们讨论了两个不同的实际问题. 虽然这两个问题的实际意义不同，但其数学形式是相同的，都归结为函数在某一区间上的一种特定的和式的极限. 为了研究这类和式的极限，我们把它抽象为定积分的概念.

定义 5.1　设函数 $y = f(x)$ 在$[a, b]$上有界，在区间$[a, b]$上任意插入 $n - 1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

把区间$[a, b]$分割成 n 个小区间

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

各个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，并作和式：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 如果不论对区间$[a, b]$怎样分法，也不论在小区间$[x_{i-1},$

x_i] 上点 ξ_i 怎样取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{5.1}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间[a, b] 上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{5.2}$$

其中，函数 $f(x)$ 叫做**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做**被积表达式**，变量 x 叫做**积分变量**，a 叫做**积分下限**，b 叫做**积分上限**，区间[a, b] 叫做**积分区间**.

根据定积分的定义，前面所讨论的几个问题就可以用定积分来描述如下：

曲边梯形的面积 $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

变速直线运动的路程 $S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$.

下面对定积分的定义再作一些说明.

(1) 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个特殊的和式的极限值，它是一个常量. 它只与被积函数 $f(x)$ 与积分区间[a, b] 有关，而与积分变量用什么字母记法无关. 例如，若改用 t 或 u 来表示积分变量 x，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 按定积分的定义，只有当和式的极限存在时，$f(x)$ 在区间[a, b] 上的定积分才存在，这时也称 $f(x)$ 在区间[a, b] 上可积. 那么，$f(x)$ 在[a, b] 上应满足怎样的条件，才能保证 $f(x)$ 在[a, b] 上可积呢?下面我们给出定积分存在的两个充分条件(证明从略).

定理 5.1 设 $f(x)$ 在区间[a, b] 上连续，则 $f(x)$ 在[a, b] 上的定积分存在，即 $f(x)$ 在[a, b] 上可积.

今后，我们总是假定被积函数 $f(x)$ 在积分区间[a, b] 上是连续的，从而保证 $f(x)$ 在[a, b] 上的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 总是存在的. 但是，对于 $f(x)$ 可积的条件还可以减弱，下面给出另一个充分条件.

定理 5.2 设 $f(x)$ 在[a, b] 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在[a, b] 上可积.

(3) 在定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义中，我们总是假定 $a < b$ 的. 为了应用方便起见，对于 $a = b$ 或 $a > b$ 的情形，我们作以下的补充规定：

当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$；

当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

三、定积分的几何意义

由前面对曲边梯形的讨论，可以得到定积分的几何意义如下.

(1) 如果在$[a, b]$上 $f(x) \geqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线$y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，与 x 轴($y = 0$)所围成的曲边梯形的面积 A(如图 5-4)；

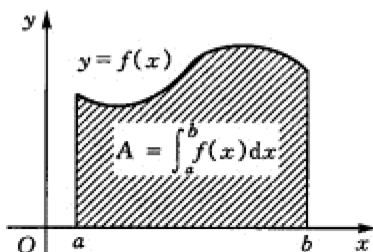


图 5-4

(2) 如果在$[a, b]$上，$f(x) \leqslant 0$，则由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的每一项中，$f(\xi_i) \leqslant 0$，$\Delta x_i > 0$，而面积总是正的，所以曲边梯形的面积为

$$A = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= -\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

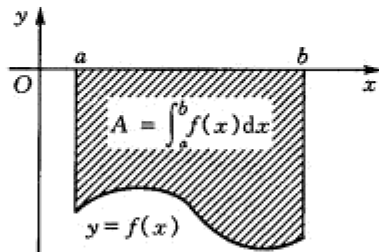


图 5-5

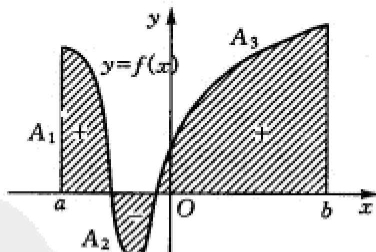


图 5-6

这时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值(图 5-5)；

(3) 如果在$[a, b]$上 $f(x)$ 有正有负，即函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴上方，某些部分在 x 轴下方，这时规定：在 x 轴上方的图形面积为正的，在 x 轴下方的图形面积为负的，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示介于 x 轴、曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$，$x = b$ 之间的各部分面积的代数和，如图 5-6 所示，就有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$

四、定积分的性质

由定积分的定义及极限的运算法则与性质，可以得到定积分的性质.

性质 5.1　函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差)，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意，这个性质对于被积函数是有限多个函数的代数和也是成立的.

性质 5.2　被积函数中的不为零的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ (k \text{ 是常数}).$$

性质 5.3　如果将积分区间$[a, b]$分成$[a, c]$和$[c, b]$两部分，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

不论 a，b，c 的相对位置如何，性质 5.3 总是成立的.

这个性质表明，定积分对于积分区间是具有可加性的.

性质 5.4　如果在区间$[a, b]$上 $f(x) \equiv 1$，则$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

性质 5.5　(定积分的比较性质)　如果在区间$[a, b]$上，$f(x) \leqslant g(x)$则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a < b).$$

性质 5.6　(定积分的估值性质)　设 M 与 m 分别是函数$f(x)$在$[a, b]$上的最大值与最小值，则

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a).$$

性质 5.7　(定积分中值定理)　如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续，则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a)$$

$$(a \leqslant \xi \leqslant b).$$

当 $f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 时，积分中值定理的几何解释是：由曲线 $y = f(x)$，直线 $y = 0$，$x = a$，$x = b$ 所围成的曲边梯形面积，等于以区间$[a, b]$

为底、以该区间内某一点 ξ 处的函数值 $f(\xi)$ 为高的矩形面积(图 5-7).

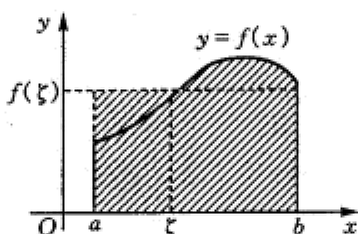


图 5-7

例 5.1 利用定积分的性质(不必计算定积分的值),比较下列各对定积分的大小:

(1) $\int_1^e \ln x \mathrm{d}x$ 与 $\int_1^e (\ln x)^2 \mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$.

解

(1) 因为在 $[1, e]$ 上有 $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, 从而有

$$\ln x \geqslant (\ln x)^2$$

故由性质 5.5 可知, $\int_1^e \ln x \mathrm{d}x \geqslant \int_1^e (\ln x)^2 \mathrm{d}x$.

(2) 因为在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 可证 $x \geqslant \sin x$.

事实上, 设 $f(x) = x - \sin x$, 则在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加, 从而有 $f(x) \geqslant f(0) = 0$, 即当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $x \geqslant \sin x$ 成立. 故由性质 5.5 可知, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$.

例 5.2 估计下列定积分的值介于哪两个数之间:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

解

(1) 先求被积函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在积分区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值与最小值. 因为

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$
$$= \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0, \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少. 于是在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 $f(x)$ 有最小值和最大值分别为

$$m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, \ M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

由性质 5.6 可得

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 与上例类似，先求被积函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在积分区间 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值. 因为 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$. 比较 $f(x)$ 在驻点及区间端点处的函数值

$$f(0)=\mathrm{e}^0=1;\ f(-1)=f(1)=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

可知 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值 $M=1$，最小值 $m=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 由性质 5.6 得

$$\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant 2.$$

习题 5-1

1. 由曲线 $y=x^3$，直线 $x=1$，$x=3$ 及 x 轴所围成的曲边梯形，试用定积分表示曲边梯形的面积 A.

2. 利用定积分的几何意义，求出下列定积分值.

(1) $\int_1^2 x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^1 x\,|\,x\,|\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$.

3. 比较下列各对积分值的大小.

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$.

4. 估计定积分的值.

(1) $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$.

第二节　牛顿 - 莱布尼茨公式

若利用定积分的定义计算定积分就是归结为计算和式的极限，这是比较麻

烦的. 因此, 必须寻求计算定积分的简便而有效的方法. 本节中将介绍定积分的基本公式 —— 牛顿 - 莱布尼茨公式.

我们知道, 如果物体以速度 $v(t)$ 作直线运动, 那么, 在时间间隔$[a, b]$上物体经过的路程为

$$S = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

另一方面, 这段路程又可以用路程函数 $S(t)$ 在区间$[a, b]$上的增量来 $S(b) - S(a)$ 来表示. 从而可得

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = S(b) - S(a).$$

因为路程函数 $S(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的一个原函数($S'(t) = v(t)$), 所以上式表明: 计算定积分$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$就是计算$v(t)$的原函数 $S(t)$ 在区间$[a, b]$上的增量 $S(b) - S(a)$. 从这个具体问题中得到的结论, 在一定条件下是具有普遍意义的.

下面这个定理给出了利用原函数计算定积分的公式.

定理 5.3　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的任意一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{5.3}$$

为了方便起见, 常把 $F(b) - F(a)$ 记作$[F(x)]_a^b$或$F(x)\big|_a^b$, 于是式(5.3)也可记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \text{或} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b,$$

其中, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意的一个原函数.

公式(5.3) 称为**牛顿 - 莱布尼茨公式**, 也称为**微积分基本公式**. 这个公式表明, 当被积函数连续时, 计算定积分只需计算被积函数的任一原函数在积分上下限处函数值的差. 换句话说, 定积分的数值等于被积函数的任一原函数在积分区间上的增量. 这就进一步揭示了函数的定积分与原函数(不定积分) 之间的内在联系, 把定积分的计算问题转化为主要是计算不定积分(求原函数) 的问题.

下面来举几个利用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分的例子.

例 5.3　计算$\int_a^b x\mathrm{d}x$.

解　$\int_a^b x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$

例 5.4　计算$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$.

例 5.5　计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

解　由于 $-\cos x$ 是被积函数 $\sin x$ 的一个原函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - \left[-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5.6　计算$\int_{-10}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

解　$\int_{-10}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-10}^{-2} = \ln 2 - \ln 10 = \ln\frac{1}{5}$.

利用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分的条件是，被积函数在积分区间上连续．当被积函数在积分区间上有有限个第一类间断点，或者在不同的区间上被积函数的表达式不相同时，则可用定积分的性质，把它拆成几个定积分之和，使每个定积分都满足牛顿 - 莱布尼茨公式计算的条件．

例 5.7　求$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

注　本例中被积函数 $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2}|\cos x|$，当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$|\cos x| = \cos x$；

当$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$时，$|\cos x| = -\cos x$．如果忽略了这一点，就会产生错误．

例 5.8　设 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2}, & x > 1. \end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 如图5-8所示，利用定积分性质5.3，得

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2\\ &= \frac{3}{2}+\frac{7}{6}=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

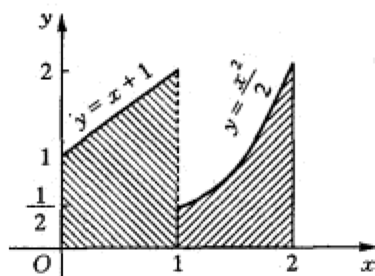


图 5-8

习题 5-2

1. 计算下列定积分.

(1) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$；　(2) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|\ln x|}{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_1^{e}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}\mathrm{d}y$；

(7) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3\theta\mathrm{d}\theta$；

(9) $\int_{-(e+1)}^{-2}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$；　(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^3x-\cos^5x}\,\mathrm{d}x$；

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$；　(12) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$；

(13) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos2x}\,\mathrm{d}x$；　(14) $\int_0^2\sqrt{(1-x)^2}\mathrm{d}x$；

(15) 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

第三节　定积分的换元积分法

上一节中得到的牛顿-莱布尼茨公式，为计算定积分提供了一种基本的方法．它把定积分的计算转化为求不定积分(原函数)的问题，从而使得求不定积分的各种法则都可以用于计算定积分．本节将在不定积分换元法的基础上，建立相应的定积分的换元积分法．

先看一个例子.

例 5.9　计算$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　应用牛顿 - 莱布尼茨公式，首先求不定积分$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$. 利用换元积分法，设 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，从而

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{4}.$$

如果我们在换元的同时，根据所设的代换 $x=a\sin t$，相应地变换定积分的上下限：

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，则不必将 t 代回原来的变量x，就能求得定积分：

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

很明显，后面的计算过程要简便得多，这就是采用了定积分的换元积分法.

下面给出关于定积分换元法的一个定理.

定理 5.4　假设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上具有连续导数 $\varphi'(t)$，且当 t 在α与β之间变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在区间$[a,b]$上变化，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

这就是定积分的**换元积分公式**.

证　因为 $f(x)$，$\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 都连续，所以 $f(x)$ 及 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在各自的区间上的定积分及原函数也都存在. 因此，对上式两端的定积分都可以应用牛顿 - 莱布尼茨公式.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

另一方面，设 $\Phi(t)=F(\varphi(t))$，它可以看作是由 $F(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 复合而成的函数，根据复合函数的求导公式得

$$\Phi'(t)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)\varphi(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这表明 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ 是函数 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数. 因此

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t&=[\Phi(t)]_\alpha^\beta=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\\&=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(b).\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f(x)=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

使用上述公式时，应注意两点：

(1) 积分上、下限要跟着变换，即 a，b 与 α，β 的关系是 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$，这里下限 α 不一定小于上限 β；

(2) 求出 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必像求不定积分那样，再要把 $\Phi(t)$ 换回原来变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限依次代入 $\Phi(t)$ 中，然后相减就行了.

例 5.10 计算 $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根式，可设 $\sqrt{1+x}=t$，即 $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 且当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=3$ 时，$t=2$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x&=\int_1^2\frac{t^2-1}{t}2t\mathrm{d}t=2\int_1^2(t^2-1)\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_1^2=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

例 5.11 计算 $\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根式，可设 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，即 $x=\ln(t^2+1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\ln2$ 时，$t=1$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x\ 2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t&=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=2[t-\arctan t]_0^1=2(1-\arctan1)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

例 5.12 计算 $\int_{-2}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$. 且当 $x=-2$ 时，即 $\cos t=-\frac{1}{2}$，

$t=\dfrac{2\pi}{3}$；当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$t=\dfrac{3\pi}{4}$. 由于 t 在$\dfrac{2\pi}{3}$到$\dfrac{3\pi}{4}$之间变化，所以 $\tan t<0$，即得

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2 t-1}=|\tan t|=-\tan t.$$

于是

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sec t\tan t}{-\tan t}\mathrm{d}t=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=-\left[\ln|\sec t+\tan t|\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}.$$

例 5.13　计算$\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}a}{3}}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

解　设 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 当 $x=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$ 时，$\tan t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$t=\dfrac{\pi}{6}$；当 $x=a$ 时，$\tan t=1$，$t=\dfrac{\pi}{4}$. 于是

$$\int_{\frac{\sqrt{3}a}{3}}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a^2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2 t}=\frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{\sin t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{a^2}(2-\sqrt{2}).$$

注　在本例的最后一个积分步骤中，由于凑微分后未引入新的积分变量，所以积分的上、下限就不必再变动. 只有当引入了新的积分变量后，才需要变换积分的上、下限.

例 5.14　计算$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解　设 $t=\cos x$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t=0$. 于是

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_{1}^{0}t^5\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}t^5\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{6}t^6\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

在本例中，如果没有引入新变量 t，那么定积分的上下限就不要变更. 现在用这种表示法计算如下：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\left[\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\left(0-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

例 5.15　计算$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解　设 $t=\ln x$，则 $dt=\frac{dx}{x}$. 当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x=e^2$ 时，$t=2$. 于是

$$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\int_0^2(1+t)^{-\frac{1}{2}}d(1+t)$$
$$=\left[2(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2=2(\sqrt{3}-1).$$

例 5.16　证明

(1) 若 $f(x)$ 在$[-a, a]$上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx; \tag{5.5}$$

(2) 若 $f(x)$ 在$[-a, a]$上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0. \tag{5.6}$$

证　利用定积分的性质 5.3，得

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx.$$

对积分$\int_{-a}^a f(x)dx$ 作变量代换$x=-t$，则 $dx=-t$，且当 $x=-a$ 时，$t=a$；当 $x=0$ 时，$t=0$. 于是

$$\int_{-a}^a f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx.$$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则

$$f(x)+f(-x)=2f(x),$$

从而
$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，则

$$f(x)+f(-x)=0,$$

从而
$$\int_{-a}^a f(x)dx=0.$$

式(5.5)和(5.6)的几何意义也是很明显的. 因为偶函数的图形对称于 y 轴(图 5-9)，有

$\int_{-a}^a f(x)dx=2A$（A 为图中 y 轴一侧图形的面积）$=2\int_0^a f(x)dx$；奇函数的图形对称于原点(图 5-10)，有

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

$$= -A_1 + A_1(A_1 \text{为图中} y \text{轴一侧图形的面积}) = 0.$$

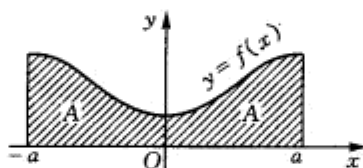


图 5-9

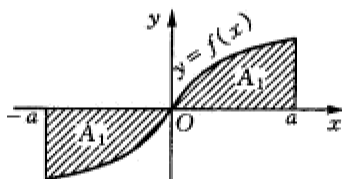


图 5-10

所以，利用定积分的几何意义，也可以说明式(5.5)(5.6)是正确的.

利用式(5.5)(5.6)，对于偶函数及奇函数在对称于原点的区间上的定积分，可以简化计算.

例 5.17 计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 因为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，积分区间是关于原点的对称区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 于是

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2[\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

例 5.18 计算$\int_{-R}^{R} h\sqrt{R^2-h^2}\,\mathrm{d}h$ (R 为常数，$R>0$).

解 由于被积函数 $f(h) = h\sqrt{R^2-h^2}$ 是奇函数，它在关于原点对称的区间$[-R, R]$上的定积分等于零，即

$$\int_{-R}^{R} h\sqrt{R^2-h^2}\,\mathrm{d}h = 0.$$

例 5.19 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x, \ (n \text{ 为自然数}).$$

证 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，且当 $x = 0$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$t = 0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

习题 5-3

1. 计算下列定积分.

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$;

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi$;

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\,\mathrm{d}u$;

(5) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\,\mathrm{d}y$;

(7) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(8) $\int_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$;

(10) $\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_{0}^{\sqrt{2}a}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}$;

(12) $\int_{0}^{1}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$;

(13) $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{(\ln x)^4}{x}\mathrm{d}x$;

(14) $\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int_{0}^{\ln 2}\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^3\mathrm{d}x$;

(17) $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(18) $\int_{0}^{\frac{a}{2}}\frac{a\,\mathrm{d}x}{(x-a)(x-2a)}$;

(19) $\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)}$;

(20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3x}\,\mathrm{d}x$;

(21) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

2. 利用函数的奇偶性计算下列定积分.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$;

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$.

第四节　定积分的分部积分法

设函数 $v(x)$, $v(x)$ 在区间$[a,b]$上具有连续导数 $u'(x)$, $v'(x)$, 则

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

分别求等式两端在区间$[a, b]$上的定积分，得

$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = \int_a^b vu'\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x.$$

利用牛顿 - 莱布尼茨公式，有

$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = [uv]_a^b.$$

故得

$$[uv]_a^b = \int_a^b vu'\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x.$$

移项后，便得到

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x,$$

简写为

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u, \tag{5.7}$$

这就是定积分的**分部积分公式**.

例 5.20　计算$\int_0^\pi x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^\pi x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi x\mathrm{d}\sin\frac{x}{2} = \left[2x\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi + 4\left[\cos\frac{x}{2}\right]_0^\pi = 2\pi - 4.$$

例 5.21　计算$\int_1^{e^2} x\ln x\mathrm{d}x$.

解

$$\int_1^{e^2} x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\ln x\mathrm{d}x^2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{e^2} - \frac{1}{2}\int_1^{e^2} x^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$= e^4 - \frac{1}{2}\int_1^{e_2} x\mathrm{d}x = e^4 - \left[\frac{x}{4}\right]_1^{e^2} = \frac{1}{4}(3e^4 + 1).$$

例 5.22　计算$\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

例 5.23　计算$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　先换元，再用分部积分法. 令$\sqrt{x} = t$，则$x = t^2$，$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. 当$x$

$=1$ 时 $t=1$；当 $x=4$ 时，$t=2$，于是

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2te^t dt=2\int_1^2 t de^t=2[te^t]_1^2-2\int_1^2 e^t dt$$
$$=2(2e^2-e)-2[e^t]_1^2=4e^2-2e-2e^2+2e=2e^2.$$

例 5.24 计算$\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}dx$.

解 $$\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}dx=[x\sqrt{x^2+1}]_0^{\frac{4}{3}}-\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\frac{20}{9}-\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\frac{20}{9}-\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

移项合并后，两端除以 2 得

$$\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}dx=\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^{\frac{4}{3}}=\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\ln 3.$$

注 本例若用换元法作变换 $x=\tan t$，计算就复杂得多.

例 5.25 证明定积分公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数；}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n \text{ 为正奇数.}\end{cases} \tag{5.8}$$

证 因为

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(\sin x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d(-\cos x)$$

于是，由分部积分公式，得

$$I_n=[-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$
$$=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

由此得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{5.9}$$

这等式为 I_n 关于下标 n 的递推公式. 如果把 n 换成 $n-2$, 则得

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4};$$

依次进行下去, 直到 I_n 的下标递减到 0 或 1 为止. 于是

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

故得

(1) 当 n 为正偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(2) 当 n 为正奇数时,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

例 5.26　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \mathrm{d}x$.

解　由于是 $n=5$ 奇数, 故由式(5.8), 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

例 5.27　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \mathrm{d}x$.

解　由于 $n=6$ 是偶数, 故由公式(5.8), 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \mathrm{d}x = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi.$$

注　如果积分区间不是$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 就不能直接使用公式(5.8).

例 5.28　计算$\int_0^{\pi} \sin^6 x \mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\pi} \sin^6 x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 x \mathrm{d}x.$

对于第二个积分用换元积分法, 令 $x = \frac{\pi}{2} + t$, 则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, t

$= 0$；当 $x = \pi$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{\pi} \sin^6 x \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{16}\pi.$$

习题 5-4

1. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^2 x \log_2 x \mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t \mathrm{d}t$（$\omega$ 为常数）；　　(6) $\int_0^1 x \arctan x \mathrm{d}x$；

(7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$；　　(8) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \cos x \mathrm{d}x$；　　(10) $\int_0^{\mathrm{e}-1} \ln(1 + x) \mathrm{d}x$；

(11) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x| \mathrm{d}x$.

第五节　广义积分

在引入定积分概念时，我们总是假定积分区间$[a, b]$是有限区间，且被积函数在$[a, b]$上是有界函数. 但是，在实际中也常遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数在积分区间上是无界的情形. 要解决这类积分的计算问题，就必须把定积分的概念加以推广，即把被积函数推广到无穷区间，或者把被积函数推广到在有限区间上是无界的情形. 这就是本节中将要引进的两类广义积分的概念.

一、无穷区间上的广义积分

定义 5.2　设函数 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上连续，任取 $b > a$，如果极限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为**函数** $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的**广义积分**，记作，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.10}$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；否则，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)$ **发散**.

定义 5.3　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续，任取 $a < b$，如果极限

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分，记作

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；否则，就称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

定义 5.4　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，如果广义积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称它们的和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.12}$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；否则，如果上述两个广义积分至少有一个发散，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

上述三种广义积分统称为**无穷区间上的广义积分**.

例 5.29　判断下列广义积分的敛散性，当收敛时并求其值：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为

$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$，所以广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收

敛，且有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=1.$$

(2) 考察广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 由于

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}[\ln(1+x^2)]_0^b=\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}(1+b^2)=+\infty$ (不存在)，所以广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散，而根据定义，不论广义积分$\int_{-\infty}^0\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 是否收敛，广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 总是发散的.

例 5.30 讨论广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 分别考虑$\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 及$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 因为

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0=\lim\limits_{a\to-\infty}(-\arctan a)=\frac{\pi}{2}$，所以，广义积分$\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且$\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

同理，因为

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}[\arctan x]_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$ 所以广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

因此，根据定义可知，广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

本例的几何意义表示：曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 与 x 轴之间的图形面积是存在的，且其值为 π(图 5-11).

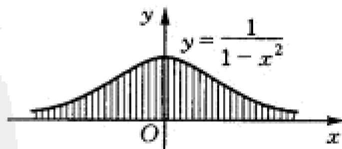


图 5-11

例 5.31 讨论广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$ 的敛散性，其中 p 为任意正实数.

解 当 $p=1$ 时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}[\ln x]_a^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\ln a=+\infty,$$

所以广义积分发散.

当 $p\neq1$ 时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}$$
$$= \begin{cases} +\infty, & p<1, \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1. \end{cases}$$

所以 $p<1$ 时，广义积分发散；$p>1$ 时，广义积分收敛，且

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \quad (p>1).$$

综上可知，当 $0<p\leqslant 1$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散；当 $p>1$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛.

二、无界函数的广义积分

定义 5.5 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$（$a$ 称为无穷间断点，又叫瑕点）. 任取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分，仍记为 $\int_a^b f(x)dx$. 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{5.13}$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**；否则，如果极限不存在，就称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**.

定义 5.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$. 任取 $\eta>0$，如果极限 $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分，也记为 $\int_a^b f(x)dx$. 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx. \tag{5.14}$$

此时也称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**；否则，就称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**.

定义 5.7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 c（$a<c<b$）外都连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$. 如果两个广义积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.15}$$

否则，当上述两个广义积分至少有一个发散时，则称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

上述无界函数的广义积分也称为瑕积分.

例 5.32 判断广义积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$的敛散性，当收敛时并求其值.

解 因为

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty,$$

所以 $x=1$ 是被积函数的暇点，即被积函数在 $x=1$ 处无界. 由于

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_0^{1-\eta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0^+}[\arcsin x]_0^{1-\eta} = \lim_{\eta\to 0^+}\arcsin x(1-\eta)$$
$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

所以该广义积分收敛，且按(5.14) 式有

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0^+}\int_0^{1-\eta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

这个广义积分的值，在几何上表示位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$之下方、x 轴之上方，介于 y 轴和直线$x=1$之间的图形面积(图 5-12).

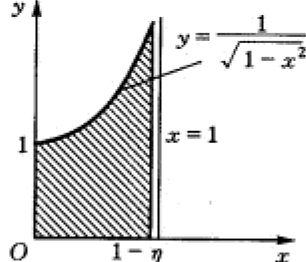


图 5-12

例 5.33 讨论广义积分$\int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$的敛散性.

解 被积函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在积分区间$[-2, 2]$上除 $x=0$外都连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$，即 $f(x)$ 在 $x=0$处无界. 于是，应考虑两个广义积分$\int_{-2}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$与$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$的敛散性.

由于$\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\epsilon^2 = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{2}\right) = +\infty$ (不存在)，

所以，广义积分$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$发散，从而广义积分$\int_{-2}^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$也发散.

注 如果疏忽了 $x=0$是被积函数的无穷间断点(暇点)，就会把这个无界函数的广义积分误认为定积分，从而得到以下的错误结果：

$$\int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^2 = -\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

例 5.34　证明广义积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$当 $q<1$ 时收敛；当 $q \geqslant 1$ 时发散.

解　当 $q=1$ 时，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 因为

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln x]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = +\infty,$$

所以广义积分发散.

当 $q \neq 1$ 时，

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-q} - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q<0, \\ +\infty, & q>1. \end{cases}$$

综上可知：当 $q<1$ 时，广义积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；当 $q \geqslant 1$ 时，广义积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$发散.

习题 5-5

1. 判定下列各广义积分的敛散性. 如果收敛，计算出它的值.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x \, (a>0)$；

(4) $\int_0^{+\infty} x \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$；　(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；　(6) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(7) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$；　(8) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$；　(9) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$；

(10) $\int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$；　(11) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　(12) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} \mathrm{d}x$.

第六章　定积分的应用

在上一章中，我们讨论了定积分的概念与计算．由于定积分的产生有其深刻的实际背景，因此，定积分的应用也是非常广泛的．本章只着重讨论定积分在几何及物理中的一些应用．

利用定积分解决实际问题的关键是，如何把实际问题抽象为定积分的问题，建立定积分表达式．下面先来简单地介绍常用的一种方法——微元法．

由定积分的定义及几何意义可知，能用定积分表示的量 Q，必须符合以下条件：

(1) Q 的值是与某个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关；

(2) 如果把区间 $[a, b]$ 分成若干个小区间，那么，相应于整个区间 $[a, b]$ 上的总量 Q，等于相应于各个小区间的部分量之和，即总量 Q 对于给定的区间具有可加性；

(3) 相应于小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的部分量 ΔQ_i，可近似地表示为

$$\Delta Q_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\xi_i$ 是小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任意一点，于是有

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

而

$$Q = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$．

当所求量 Q 可考虑用定积分表达时，通常可省略下标 i，用区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 来代替任一小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，并取 ξ_i 为小区间的左端点 x．这样，确定所求量 Q 的定积分表达式的步骤就可以简化为：

(1) 根据实际问题的具体情况，选取某个变量，例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$．

(2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，任取其中的一个代表性区间，并记作 $[x, x + \mathrm{d}x]$．求出相应于这个小区间的部分量 ΔQ 的近似值，记作 $\mathrm{d}Q$，即

$$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x.$$

称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为所求量 Q 的微元．

(3) 以 $\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所

求量 Q 的定积分表达式

$$Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

上述方法称为定积分的微元法. 在下面各节中，将直接用微元法来讨论一些几何、物理问题.

第一节　平面图形的面积

一、直角坐标情形

我们知道，由曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$) 及直线 $x=a$，$x=b$ ($a<b$) 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{6.1}$$

其中，被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是直角坐标系下的面积微元 $\mathrm{d}A$，它表示高为 $f(x)$、底为 $\mathrm{d}x$ 的一个矩形面积(图 6-1).

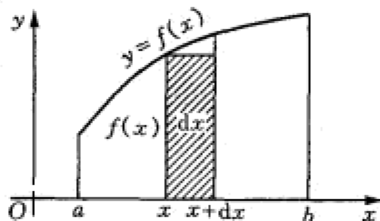


图 6-1

利用定积分，还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

例如，设在区间 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 和 $g(x)$ 均为单值连续函数，且 $f(x)\geqslant g(x)$，求由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ ($a<b$) 所围成的图形(图 6-2) 的面积.

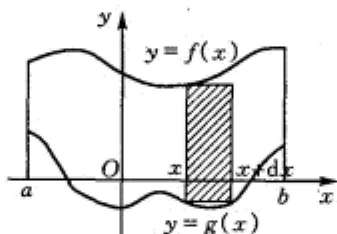


图 6-2

采用微元法，步骤如下：

(1) 选取横坐标 x 为积分变量，其变化区间为 $[a, b]$；

(2) 在区间 $[a, b]$ 上任取一代表性小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，相应于这个小区间上的面积为 ΔA，它可以用高为 $f(x)-g(x)$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形面积来近似代替，即

$$\Delta A\approx[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

因此，面积微元为

$$\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x;$$

(3) 以面积微元 $\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所求的面积为

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

类似地，若在区间$[c, d]$上，$\varphi(y)$和$\Psi(y)$均为单值连续函数，且$\varphi(y) \leqslant \Psi(y)$，则由曲线$x=\varphi(y)$，$x=\Psi(y)$与直线$y=c$及$y=d$ $(c<d)$所围成的平面图形(图 6-3) 的面积为

$$A=\int_c^d[\Psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y. \qquad (6.3)$$

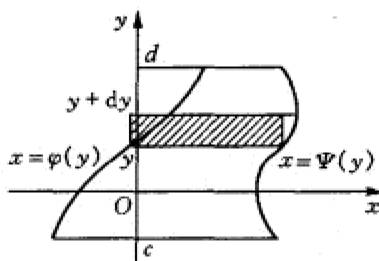


图 6-3

例 6.1　求由抛物线$y=x^2$与$y=2-x^2$所围成的图形的面积.

解　先画出一个草图(图 6-4). 解方程组

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2-x^2, \end{cases}$$

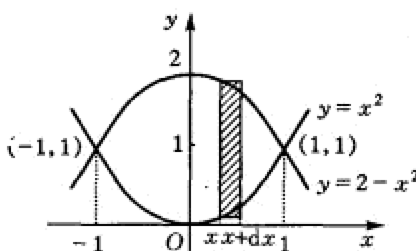


图 6-4

得到两条抛物线的交点为$(-1,1)$及$(1, 1)$. 取x为积分变量，它的变化区间为$[-1, 1]$. 在$[-1, 1]$上任取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，与它相应的窄条形的面积近似于高为$[(2-x^2)-x^2]$、底为$\mathrm{d}x$的窄矩形的面积. 从而得到面积微元为

$$\mathrm{d}A=[(2-x^2)-x^2]\mathrm{d}x=2(1-x^2)\mathrm{d}x.$$

所求的面积为

$$A=\int_{-1}^1 2(1-x^2)\mathrm{d}x=4\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{3}.$$

例 6.2　求由抛物线$y^2=x$与$y=x-2$所围成的图形的面积.

解法一　先画出一个草图(图 6-5). 由方程组

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x-2, \end{cases}$$

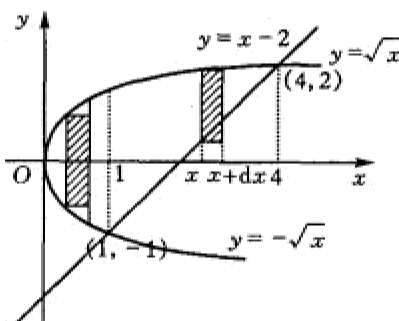


图 6-5

解得抛物线与直线的交点为$(1, -1)$及$(4, 2)$.

选取横坐标x为积分变量，它的变化区间为$[0, 4]$. 如果在上$[0, 4]$任取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，由于相应于这个小区间的窄条形在$x\in[0, 1]$和$x\in[1, 4]$这两段中的情况是不同的，所以要把图形的面积分成两部分来计算，最后加起来就得到整个图形的面积.

在$[0, 1]$上任取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，面积微元为

$$\mathrm{d}A_1=[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\mathrm{d}x,$$

所以

$$A_1 = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

同理，在[1，4]上任取一小区间[x，$x + dx$]，面积微元为

$$dA_2 = [\sqrt{x} - (x - 2)]dx,$$

所以

$$A_2 = \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\int_1^4 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x - 2)^2\right]_1^4 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}.$$

于是所求图形的面积为

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

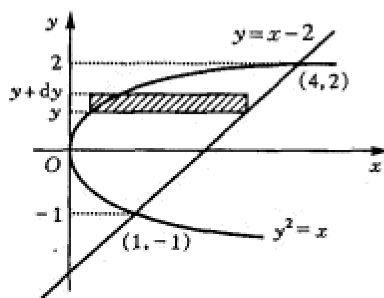


图 6-6

解法二 取纵坐标 y 为积分变量，它的变化区间为[-1，2]，在[-1，2]上任取一小区间[y，$y + dy$]，面积微元为

$$dA = [(y + 2) - y^2]dy.$$

所求的面积为

$$A = \int_{-1}^{3}[(y + 2) - y^2]dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^4\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

从本例的两种解法可以看到，解法2比解法1要简便得多. 因此，适当选取积分变量，对于计算的繁易很有关系.

例 6.3 求由椭圆曲线$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 所围成的平面图形的面积.

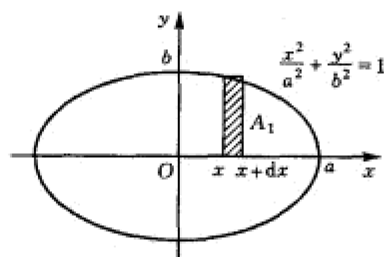


图 6-7

解 这椭圆关于两坐标轴都对称(图 6-7)，所以椭圆的面积

$$A = 4A_1,$$

其中，A_1 为该椭圆在第一象限部分的面积. 因此

$$A = 4A_1 = 4\int_0^a y\,dx.$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

及定积分的换元积分法，令 $x = a\cot t$，则 $y = b\sin t$，$dx = -a\sin t\,dt$. 当 $x = 0$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$；当 $x = a$ 时，$t = 0$. 于是

$$A = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

显然，当 $a = b$ 时就得到半径为 a 的圆面积公式 $A = \pi a^2$.

二、极坐标情形

某些平面图形的面积，利用极坐标计算比较方便.

设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)$，其中 $r(\theta)$ 为连续函数，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. 现在要计算由此曲线与两条射线 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形(图 6-8) 的面积.

利用微元法：

(1) 选取 θ 为积分变量，它的变化区间为$[\alpha,\beta]$；

(2) 在$[\alpha, \beta]$上任取一代表性的小区间$[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$，相应于这个小区间上小曲边扇形的面积 ΔA，可用半径为 $r = r(\theta)$、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形面积来近似代替，因此，曲边扇形的面积微元为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta;$$

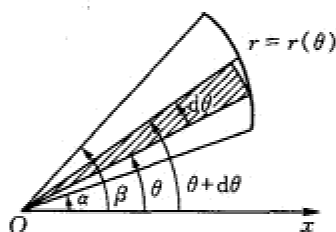


图 6-8

(3) 以 $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$ 为被积表达式，在闭区间$[\alpha, \beta]$上作定积分，便得所求的面积为

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (6.4)$$

例 6.4　求由心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ 所围成的图形的面积.

解　画出心形线所围成的图形(图 6-9). 这个图形对称于极轴，因此所求图形的面积 A 是极轴上方部分图形面积 A_1 的 2 倍.

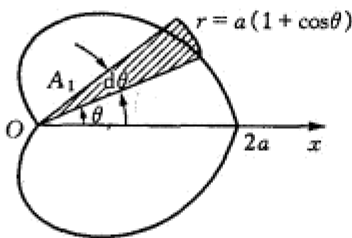


图 6-9

为了计算 A_1，取 θ 为积分变量，它的变化区间为$[0, \pi]$(当 $\theta = 0$ 时，$r = 2a$；当 $\theta = \pi$ 时，$r = 0$). 由公式(6.4) 可得

$$A_1 = \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1 + \cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^\pi\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

习题 6-1

1. 求由下列各直线或曲线所围成的图形的面积.

(1) $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$；

(2) $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 及 $y = 2x$；

(3) $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y = x$；

(4) 抛物线 $y^2 = x$，$x^2 = y$；

(5) 抛物线 $(y-1)^2 = x + 1$ 与直线 $y = x$；

(6) 曲线 $y = x^3$ 与直线 $x = -1$，$x = 2$ 及 x 轴；

(7) $y = \sin x$，$y = \cos x$ 及 $x = 0$，$x = \frac{\pi}{2}$；

(8) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 与直线 $y = x + 1$.

2. 求下列参数方程表示的曲线所围成图形的面积.

(1) $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$；

(2) $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cot t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a > 0)$ 与 x 轴.

3. 求下列极坐标方程表示的曲线围成的图形的面积 $(a > 0)$：

(1) $r = 2a\cos\theta$；　　(2) $y = a\sin 3\theta$.

第二节　某些特殊立体的体积及平面曲线的弧长

一、平行截面面积为已知的立体的体积

设有一空间立体 Ω，介于过 x 轴上 a，b($a < b$) 两点且垂直于 x 轴的两平面之间(图 6-10).

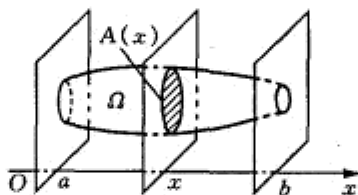


图 6-10

若过 x 轴上任一点 x($a \leqslant x \leqslant b$) 作垂直于 x 轴的平面，截立方体 Ω 所得截面的面积为 A，则 A 是 x 的函数，记作 $A(x)$，其定义域为 $[a, b]$.

设空间立体 Ω 的截面面积函数 $A(x)$ 为已知的连续函数，则也可用微元法求得立体 Ω 的体积 V.

(1) 取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a, b]$；

(2) 在区间 $[a, b]$ 上任取一代表性小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$(图 6-11). 相应于这小区间的小块

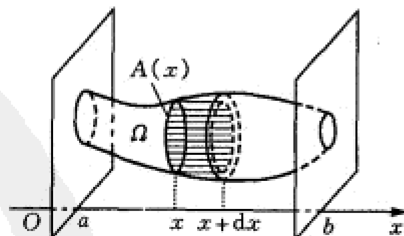


图 6-11

立体的体积，可以用一个以 $A(x)$ 为底面积、高为 dx 的薄圆柱体的体积来近似代替，即得体积微元

$$dV = A(x)dx;$$

(3) 以 $dV = A(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所求立体 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b A(x)dx. \tag{6.5}$$

例 6.5 证明半径为 R 的球体的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$.

证 为方便起见，先考虑半径为 R 的半球体，且过球心 O 作这半球体的对称轴，把它取作 x 轴(图 6-12).

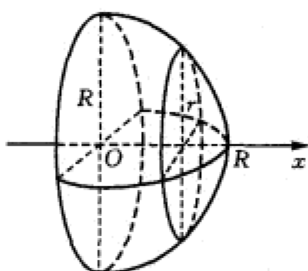


图 6-12

取 x 为积分变量，它的变化区间是 $[0, R]$，在区间 $[0, R]$ 上任取一点 x 处，作垂直于 x 轴的平面，这平面与半球体相交的截面是一个圆，圆的半径是 $r = \sqrt{R^2 - x^2}$，

故半球体在点 x 处的截面面积是 x 的已知函数：

$$A(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

利用公式(6.5). 便得半球体的体积为

$$V_1 = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

从而证得半径为 R 的球体的体积为 $V = 2V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

例 6.6 设有一底面半径为 R 的圆柱体被一平面所截，平面过圆柱底圆的直径且与底面交成角 α(图 6-13). 求这平面截圆柱体所得立体(楔形体)的体积.

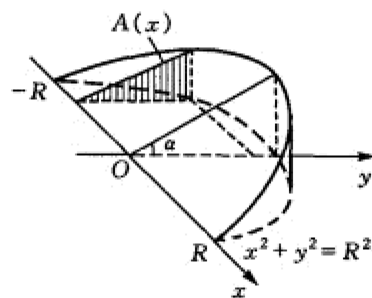


图 6-13

解 取平面与圆柱底面的交线为 x 轴，底面上过圆心且垂直于 x 轴的直线为 y 轴，那么，底圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

如果用一组垂直于 x 轴的平行平面截该立方体，则所得的平行截面都是直角三角形，从而可以计算出它们的面积 A. 因此，我们选取 x 为积分变量，其变化区间为 $[-R, R]$. 在 $[-R, R]$ 上任取一小区间 $[x, x + dx]$，过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形(图 6-13 中有影线的部分)，两条直角边的长度分别为 y 及 $y\tan\alpha$，而 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$，所以它的面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}y^2\tan\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha.$$

从而体积微元为

$$dV = A(x)dx = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha dx.$$

利用公式(6.5)，在闭区间$[-R, R]$上作定积分，便得所求立体的体积为

$$V = \int_{-R}^{R}A(x)dx = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan\alpha\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

二、旋转体的体积

旋转体是指由平面图形绕该平面上某直线旋转一周而成的立体，该直线称为**旋转轴**. 例如，圆锥可以看成是由直角三角形绕它的一个直角边旋转一周而成的旋转体；球体可以看成是半圆绕它的直径旋转一周而成的旋转体. 一般地说，旋转体总可以看作是由平面上的曲边梯形绕某个坐标轴旋转一周而得到的立体.

现在来运用定积分，计算由连续曲线$y = f(x)$，直线$x = a$，$x = b(a < b)$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体(图 6-14) 的体积.

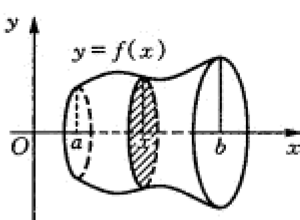


图 6-14

取x轴为积分变量，其变化区间为$[a, b]$. 在$[a, b]$上任取一点x处垂直于x轴的截面是半径等于$y = f(x)$的圆，因而此截面面积为

$$a(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2.$$

由已知平行截面面积求体积的公式(6.5)，得曲边梯形绕x轴旋转一周所成的立体的体积为

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx. \qquad (6.6)$$

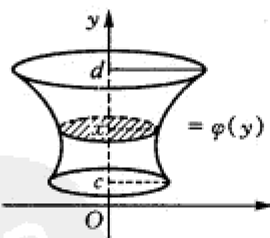


图 6-15

类似地，可以得到由连续曲线$x = \varphi(y)$、直线$y = c$，$y = d(c < d)$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体(图 6-15) 的体积为

$$V = \int_c^d \pi x^2 dy = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy. \qquad (6.7)$$

例 6.7　求底圆半径为r，高为h的圆锥体的体积.

解　取圆锥体的顶点为原点，圆锥的轴为x轴，则直线OP的方程为$y = \frac{r}{h}x$，而圆锥体可看作由直线$y = \frac{r}{h}x$，$x = 0$，$x = h$及x轴所围成的直角三角

形 x 绕轴旋转而成的(图 6-16). 于是, 由旋转体体积的计算公式(6.6), 得此圆锥体的体积

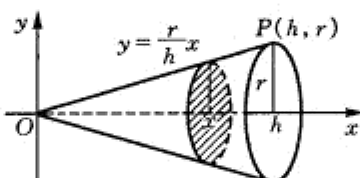


图 6-16

$$V=\int_0^h \pi y^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi r^2}{3h^2}[x^3]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

例 6.8 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转体也可看作是由上半椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成的(图 6-17). 于是, 利用旋转体体积的计算公式(6.6), 得此旋转椭球体的体积为

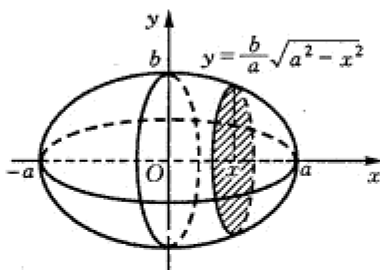


图 6-17

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x \text{(被积函数是偶函数)}$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

当 $a=b$ 时, 旋转椭球体就成为半径为 a 的球体, 它的体积是 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

例 6.9 求圆心在$(b, 0)$, 半径为 a $(b>a)$ 的圆绕 y 轴旋转而成(如汽车轮胎那样)的环状体的体积.

解 圆的方程为$(x-b)^2+y^2=a^2$. 显然, 此环状体的体积可以看作是由右半圆周 $x_2=b+\sqrt{a^2-y^2}$ 和左半圆周 $x_1=b-\sqrt{a^2-y^2}$, 分别与直线 $y=-a$, $y=a$ 及 y 轴所围成的曲边梯形, 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积之差(图 6-18).

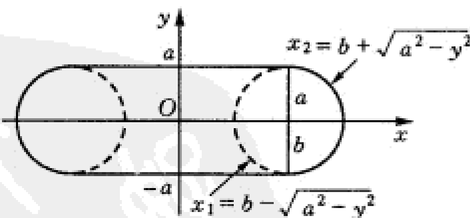


图 6-18

利用旋转体体积的计算公式(6.7), 得所求环状体的体积为

$$V_y=\int_{-a}^{a}\pi x_2^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi x_1^2\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\pi(x_2^2-x_1^2)\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi\int_0^a [(b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - y^2})^2]dy$$

$$= 2\pi\int_0^a 4b\sqrt{a^2 - y^2}dy = 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}dy$$

$$= 8\pi b\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right]_0^a = 2\pi^2 a^2 b.$$

三、平面曲线的弧长

设平面曲线弧$\widehat{AB}$的直角坐标方程为

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中，$f(x)$在$[a, b]$上具有一阶连续导数，现在来计算这曲线弧(图 6-19)的弧长. 用微元法：

(1) 取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为$[a, b]$；

(2) 在$[a, b]$上任取一小区间$[x, x + dx]$，相应于曲线上的弧段$\widehat{MN}$的弧长 Δs，可以用相应的切线段长度$|MT|$来近似代替. 即

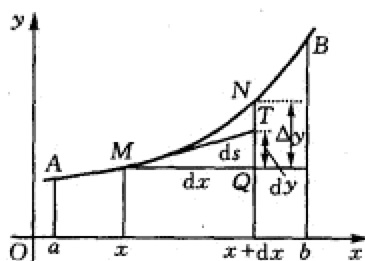


图 6-19

$$\Delta s \approx |MT| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

即得弧长微元(弧微分)为

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx;$$

(3) 以 $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ 为被积表达式，在闭区间$[a, b]$上作定积分，便得所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx. \qquad (6.8)$$

例 6.10　求半立方抛物线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 在 x 从 0 到 4 之间的一段弧(图 6-20) 的长度.

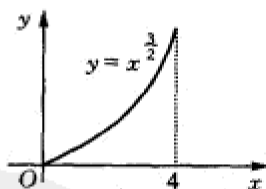


图 6-20

解　取 x 为积分变量，它的变化区间为[0, 4]. 由于

$$y' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

于是，由公式(6.8)得所求的弧长为

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1 + \frac{9}{4}x\right)$$

$$=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

习题 6-2

1. 底长为 $2a$，高为 h 的正抛物线弓形绕其底边旋转，求由此得到的旋转体的体积(图 6-21).

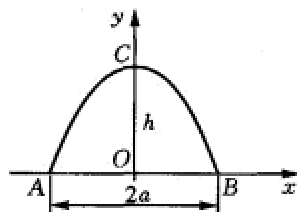


图 6-21

2. 求 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

3. 求 $x^2+(y-2)^2=1$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积.

4. 计算抛物线 $y=ax^2$ 在 $x=-b$ 至 $x=b$ 之间的弧长.

5. 求曲线弧 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ $(1\leqslant x\leqslant e)$ 的长度.

第三节　定积分的物理应用

在本章前两节中，我们介绍了定积分在几何上的几种应用. 本节将介绍定积分在物理中的一些应用，采用的仍然是微元法.

一、功

1. 变力沿直线所作的功

由物理学知道，如果一个大小和方向都不变的力 F 作用于某一物体，使该物体沿力的方向作直线运动，那么，当物体移动一段距离 s 时，力 F 所作的功为

$$W=Fs.$$

下面我们用定积分来计算变力沿直线作功问题.

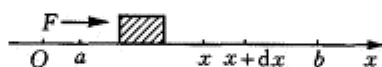


图 6-22

设物体受到一个与 x 轴平行的力 F 的作用而沿 x 轴运动，并且在 x 轴上不同点处，力 F 取不同的值，即力 F 是 x 的函数：$F=F(x)$. 现在要求物体在这个变力作用下，沿 x 轴由点 a 移到点 b 时，变力 F 所作的功 W(图 6-22).

取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取一代表性小区间 $[x,x+dx]$，当 $F(x)$ 连续时，相应于这个小区间上变力所作的功 ΔW，可用左端点 x 处的力 $F(x)$ 乘以位移 dx 来近似代替，从而得到物体从点 x 移到 x

$+ \mathrm{d}x$ 所作功 ΔW 的近似值 $F(x)\mathrm{d}x$，即功微元

$$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x.$$

以 $\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所求的功为

$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

例 6.11　设有一弹簧，原长 15cm. 假定作用 5N 力能使弹簧伸长 1cm. 求把这弹簧拉长 10cm 所作的功.

解　设弹簧一端固定，如图 6-23 所示. 在弹簧未变形时，取其自由端的平衡位置为坐标原点 O.

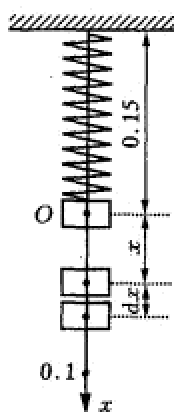


图 6-23

根据虎克定律，在一定的弹性范围内，将弹簧拉长所需的力 F 与弹簧的伸长量 x 成正比，即

$$F = kx,$$

其中，比例常数 k 为弹簧的弹性系数，它可以由已知条件来确定. 因为已知 $x = 0.01\mathrm{m}$ 时，$F = 5\mathrm{N}$，故得

$$5 = k(0.01),$$

即

$$k = 500 \ (\mathrm{N/m}).$$

因此，弹簧的拉力为

$$F = 500x.$$

显然，力 F 是随 x 变化而变化的，它是一个变力.

取伸长量 x 为积分变量，它的变化区间为 $[0, 0.1]$. 利用公式(6.9)，便得所求的功为

$$W = \int_0^{0.1} 500x\mathrm{d}x = 500\int_0^{0.1} x\mathrm{d}x = 250[x^2]_0^{0.1} = 2.5 \ (\mathrm{J}).$$

2. 抽水作功

在生产实践中，经常会遇到抽水作功的问题，它们虽然不属于变力沿直线作功的问题，但是也可以用积分来计算.

例 6.12　修建一座大桥墩时先要下围囹，并抽尽其中的水以便施工. 已知围囹(可看作圆柱体)的直径为 20m，水深 27m，围囹高出水面 3m，求抽尽水需作的功.

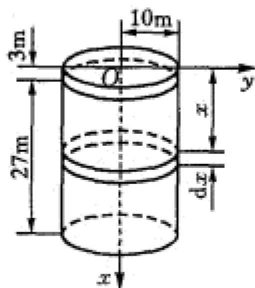


图 6-24

解　取坐标系如图 6-24 所示.

仍采用微元法：

(1) 取距离围囹顶端的深度 x 为积分变量. 由于围囹高出水面 3m，要把围囹中的水抽尽，则 x 的变化区间为 $[3, 30]$；

(2) 在区间[3, 30]上任取一小区间$[x, x+dx]$，相应于这个小区间上，由深度x到$x+dx$的一薄层水的体积为$\pi 10^2 dx$，其重量为$\rho g\pi 10^2 dx$（ρ为水的密度）. 把这薄层水抽出围图外，需提升的距离可近似地看作为x，所需作的功ΔW近似于$(\rho g\pi 10^2 dx)x$，即得功微元为

$$dW = 10^2\pi\rho g x dx;$$

(3) 以$dW = 10^2\pi\rho g x dx$为被积表达式，在闭区间[3, 30]上作定积分，便得所求的功为

$$W = \int_3^{30} 10^2\pi\rho g x dx = 10^12\pi\rho g\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{30}$$

$$= 50\pi\rho g(30^2 - 3^2) = 4.455\times 10^4\pi\rho g \approx 1.372\times 10^9(J).$$

（水的密度$\rho = 1\times 10^3 kg/m^3$）.

例 6.13 盛满水的圆锥形容器尺寸如图6-25所示. 若将容器顶部以下6m深的水全部抽到顶部上方5m高处的水箱内，求所需做的功.

解 若取y轴在水平面上，以圆锥的中心为x轴（铅直向下为正），则建立坐标系如图6-25所示. 于是，过点$A(0, 5)$和$B(6, 0)$的圆锥母线的方程为

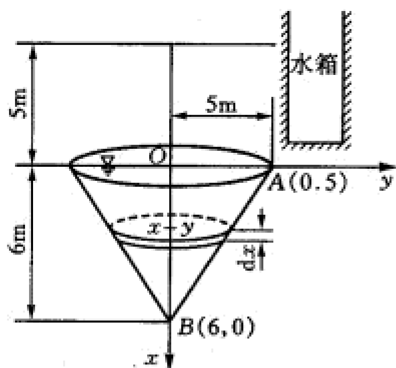


图 6-25

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1,$$

即

$$y = \frac{5}{6}(6 - x).$$

采用微元法：

(1) 取水深x为积分变量，要把水全部抽完，其变化区间为[0, 6]；

(2) 在区间[0, 6]上选取一代表性小区间$[x, x+dx]$，相应于这个小区间上，由深度x到$x+dx$的这一薄层水的体积近似于$\pi y^2 dx$，重力近似于$\rho g\pi y^2 dx$（ρ为水的密度）. 把这薄层水抽到圆锥形容器顶部上方5m高处的水箱内，移动的距离近似于$(x+5)$，所需作的功ΔW近似于$\pi\rho g y^2(x+5)dx$即功微元为

$$dW = \pi\rho g y^2(x+5)dx = \frac{25}{36}\pi\rho g(6-x)^2(x+5)dx;$$

(3) 以$dW = \pi\rho g y^2(x+5)dx = \frac{25}{36}\pi\rho g(6-x)^2(x+5)dx$为被积表达式，在闭区间[0, 6]上作定积分，便得所求的功为

$$W = \frac{25}{36}\pi\rho g\int_0^6(6-x)^2(x+5)dx \xlongequal{令 6-x=u} \frac{25}{36}\pi\rho g\int_0^6 u^2(11-u)du$$

$$= \frac{25}{36}\pi\rho g\int_0^6 u^2(11u^2 - u^3)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{25}{36}\pi\rho g\left[\frac{11}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4\right]_0^6 = 3.25 \times 10^2\pi\rho g$$
$$\approx 9.996 \times 10^6(\mathrm{J}).$$

二、水压力

由物理知识知道，在水深 h 处的压强(单位面积所受的压力)为 $p = \rho gh$，这里 ρ 是水的密度. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深 h 处，则平板一侧所受的水压力为

$$P = pA = \rho ghA.$$

若此平板是铅直地放置在水中，即平板与水面垂直，则由于在深度不同的地方，水的压强也不同，也就是说，压强随水的深度而变化. 因此，求平板一侧所受的水压力就不能简单地利用上述公式，而需用定积分来计算.

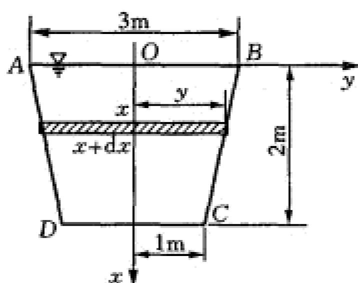


图 6-26

例6.14　有一等腰梯形闸门直立在水中，它的两条底边各长3m和2m，高为2m，较长的底边与水面相齐. 试计算闸门一侧所受的水压力.

解　选取坐标系如图 6-26 所示.

我们仍采用微元法：

(1) 取水深 x 为积分变量，它的变化区间为$[0, 2]$；

(2) 在$[0, 2]$上任取一代表性小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$. 等腰梯形上相应于这个小区间的窄条上各点处的水深可以近似地看作相同，且为 x，则压强近似于 ρgx；这窄条的面积近似于 $2y\mathrm{d}x$，因此这窄条一侧所受水压力 ΔP 的近似值，即压力微元为

$$\mathrm{d}P = 2\rho gxy\mathrm{d}x.$$

下面我们来根据已知条件，找出 x 和 y 之间的函数关系. 由于直线过点 $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 和 $C(2, 1)$，得直线 BC 的方程为

$$\frac{y - \frac{3}{2}}{x - 0} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{2 - 0},$$

即

$$y = \frac{3}{2} - \frac{x}{4}.$$

因此，压力微元为

$$dP = 2\rho g x\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)dx;$$

(3) 以 $dP = 2\rho g x\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)dx$ 为被积表达式，在闭区间[0，2]上作定积分，便得所求的水压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 2\rho g x\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)dx = 2\rho g\int_0^2\left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4}\right)dx \\ &= 2\rho g\left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^2 = \rho g\left(6 - \frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3}\rho g \\ &\approx 4.57 \times 10^4 (\mathrm{N}). \end{aligned}$$

例 6.15 洒水车上的水箱是一个横放着的椭圆柱体，尺寸如图 6-27 所示．当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力．

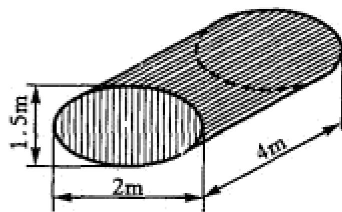


图 6-27

解 取坐标系如图6-28所示，则椭圆中心在坐标原点 $O(0, 0)$ 处．长轴在 y 轴上，长半轴 $a = 1$；短轴在 x 轴上，短半轴 $b = 0.75$．于是椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{(0.75)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

即
$$y^2 = 1 - \frac{16}{9}x^2.$$

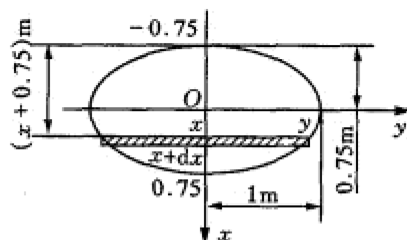


图 6-28

采用微元法：

(1) 取 x 为积分变量，它的变化区间为 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$；

(2) 在 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$上任取一代表性的小区间$[x, x + dx]$．椭圆平板上相应于这个小区间的窄条上各点处的水深近似于 $x + \frac{3}{4}$，压强近似于 $\rho g\left(x + \frac{3}{4}\right)$，这窄条的面积近似于 $2y dx$．因此，这窄条一侧所受水压力的近似值，即压力微元为

$$dP = 2\rho g\left(x + \frac{3}{4}\right)y dx = 2\rho g\left(x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{1 - \frac{16}{9}x^2}dx;$$

(3) 以 $dP = 2\rho g\left(x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{1 - \frac{16}{9}x^2}dx$ 为被积表达式，在闭区间 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$上作定积分，便得所求水压力为

$$P = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} 2\rho g\left(x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{1-\frac{16}{9}x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\rho g\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x\sqrt{1-\frac{16}{9}x^2}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\rho g\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x\sqrt{1-\frac{16}{9}x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 3\rho g\int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{1-\frac{16}{9}x^2}\mathrm{d}x.$$

令 $\frac{4}{3}x = \sin t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\cos t\mathrm{d}t$，且当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = \frac{3}{4}$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$. 于是，

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$，即 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，

$$P = 3\rho g\int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{1-\frac{16}{9}x^2}\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\rho g\int_0^{\frac{3}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{9}{4}\rho g \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{9}{16}\rho g\pi$$

$$\approx 1.7 \times 10^4(\mathrm{N}).$$

习题 6-3

1. 已知将弹簧压缩 1cm 时需力 2kg，现将弹簧压缩 5cm，需做功多少？

2. 一个半径为 R 的半球形水池，池中盛满了水，求将全部池水抽到它的水平面高为 h 处的水塔内所需做的功.

3. 有一圆台形的桶，盛满了汽油，桶高为 3m，上、下底半径分别为 1m 及 2m，试求将桶内汽油全部吸尽所耗费的功（汽油的密度 $\rho = 0.8 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$）.

4. 有一半圆形的水闸，其半径为 R，当水满时，闸所受的水的压力是多少？

5. 边长为 5m 的正方形薄片直立沉在水中，其一个顶点位于水平面，而一对角线与水面平行，求薄片一侧所受的压力(图 6-29).

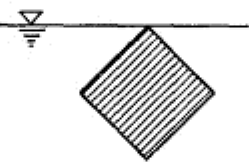


图 6-29

6. 一抛物线形平板竖直沉入水中，问它的顶点沉到距水面多少米处，板的一侧所受水压力为 $3\frac{7}{15}$ 吨(图 6-30).

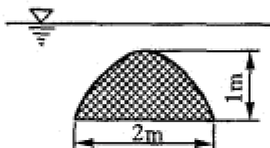


图 6-30

积分表

（一）含有 $ax+b$ 的积分

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}dx = \frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|) + C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}dx = \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|\right] + C$

5. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

6. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right) + C$

9. $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

（二）含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3} + C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{105a^3}(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{(ax+b)^3} + C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b} + C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{ax+b} + C$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C & (b>0) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & (b<0) \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

(三) 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(四) 含有 $ax^2 + b(a > 0)$ 的积分

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x + C & (b>0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right| + C & (b<0) \end{cases}$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|} + C$

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

(五) 含有 $ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$ 的积分

29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C & (b^2>4ac) \end{cases}$

30. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

(六) 含有 $\sqrt{x^2+a^2} \quad (a > 0)$ 的积分

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

（七）含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ 的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} + C$

52. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} + a\arccos\frac{a}{|x|} + C$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

（八）含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 的积分

59. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

60. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

61. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

62. $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

63. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

65. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C$

66. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a} + C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

(九) 含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ 的积分

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,dx = \frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}dx = -\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

(十) 含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln\left(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|}\right)+C$

80. $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

82. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$

(十一) 含有三角函数的积分

83. $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$

84. $\int \cos x\,dx = \sin x+C$

85. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+C$

86. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|+C$

87. $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

88. $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

89. $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x + C$

96. $\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x + C$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x} + C$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x} + C$

99. $\int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x \mathrm{d}x + C$

100. $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$

101. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$

106. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

107. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C$

108. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

（十二）含有反三角函数的积分（其中 $a>0$）

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\,dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}x + C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{6}x^2 + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

123. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

124. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

125. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

126. $\int xa^x\,dx = \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x + C$

127. $\int x^n a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}x^n a^x - \frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x\,dx$

128. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

129. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C$

130. $\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$

131. $\int e^{ax}\cos^n bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx + nb\sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\mathrm{d}x$

(十四) 含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

133. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

134. $\int x^n\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$

135. $\int (\ln x)^n\mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

136. $\int x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

(十五) 含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$

138. $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$

139. $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x = \ln\mathrm{ch}x + C$

140. $\int \mathrm{sh}^2x\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

141. $\int \mathrm{ch}^2x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

(十六) 定积分

142. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = 0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x = 0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m \neq n\\ \pi, & m = n\end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m \neq n\\ \pi, & m = n\end{cases}$

146. $\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m \neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m = n\end{cases}$

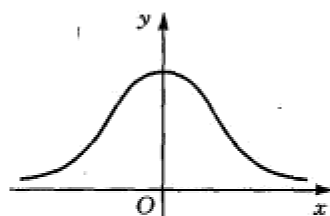
147. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$

$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

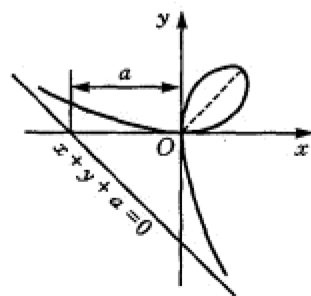
$$\begin{cases} I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ 为大于 1 的正奇数}), I_1 = 1 \\ I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}), I_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

常用平面曲线及方程

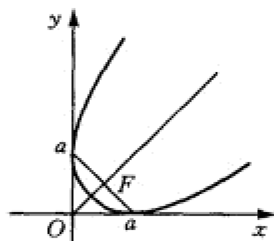
1. 概率曲线 $y=e^{-ax^2}(a>0)$.



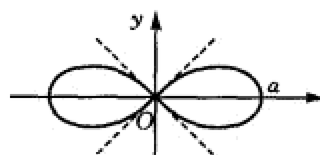
2. 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$.



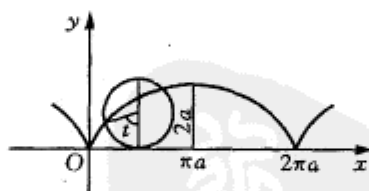
3. 抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.



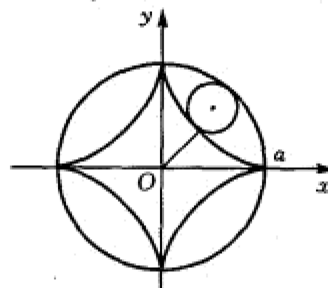
4. 伯努利双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$.



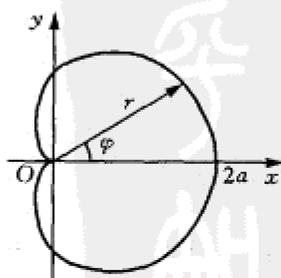
5. 摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$



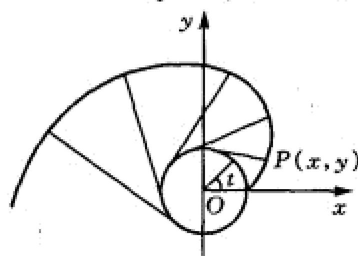
6. 内摆线(星形线) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$



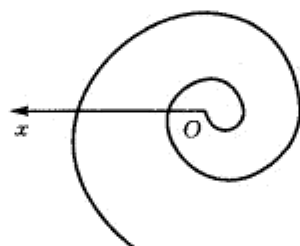
7. 心脏形线 $r=a(1+\cos\varphi)$.



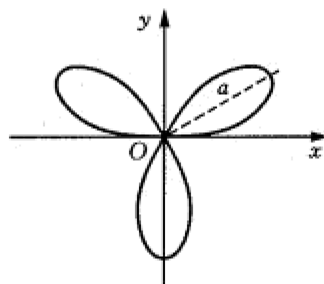
8. 圆的渐伸线(渐开线) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$



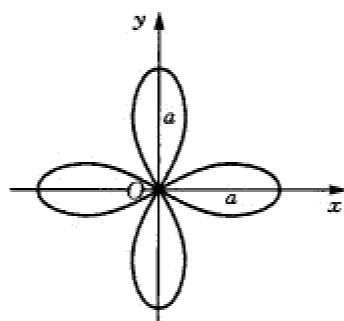
9. 阿基米得螺线 $r=a\theta(r\geqslant 0)$.



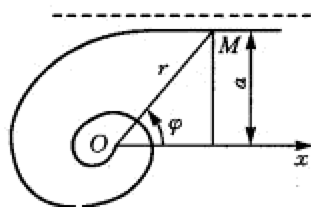
10. 三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta$.



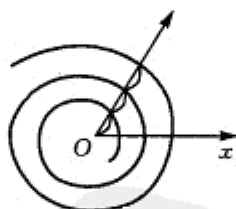
11. 四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$.



12. 双曲螺线 $r=\dfrac{a}{\varphi}(r>0)$.



13. 对数螺线 $r=e^{a\varphi}(a>0)$.



习题答案

习题 1-1

1. (1) 否；(2) 是；(3) 否；(4) 否；(5) 是.
2. (1) $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right]$；(2) $(-\infty, 1)\cup(1, 2)\cup(2, +\infty)$；
   (3) $[-1, 1]$；(4) $(-1, 1)$；(5) $(-1, 0)\cup(0, +\infty)$；
   (6) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$；(7) $\left(\frac{k}{2}\pi, \frac{k+1}{2}\pi\right)$ $(k\in Z)$；
   (8) $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ $(k\in Z)$.
3. (1) $y=\sqrt{x+1}+1$，定义域$[1, +\infty)$；
   (2) $y=\lg x-1$，定义域$(0, +\infty)$；
   (3) $y=\frac{1-x}{1+x}$，定义域$(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$；
   (4) $y=\pi-\arcsin x$，定义域$[-1, 1]$；
   (5) $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，定义域$(-\infty, +\infty)$.
4. (1) $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=8x+5$；
   (2) $y=\tan u$，$u=v^{\frac{1}{3}}$，$v=x^2+5$；
   (3) $y=a^u$，$u=v^2$，$v=\arcsin w$，$w=e^x+1$；
   (4) $y=\ln u$，$u=v^3+3$，$v=\tan w$，$w=5x^2+7$；
   (5) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$；
   (6) $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1+x^2$.

习题 1-2

1. (1) 0；(2) 2；(3) 极限不存在；(4) 极限不存在.
2. (1) 10；(2) 2；(3) -4；(4) 不存在.
3. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.
4. 0，3，$\frac{27}{4}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

习题 1-3

1. (1) 无穷小；(2) 无穷大；(3) 无穷小；(4) 无穷大.
2. (1) $x \to 1$ 时是无穷大，$x \to -2$ 时是无穷小；

 (2) $x \to \frac{\pi}{2}$ 时是无穷大，$x \to 0$ 时是无穷小；

 (3) $x \to 0$ 时是无穷大，$x \to -1$ 时是无穷小；

 (4) $x \to 0$ 时是无穷大，$x \to +\infty$ 时是无穷小；

 (5) $x \to 0^+$ 时是无穷大，$x \to 0^-$ 时是无穷小；

 (6) $x \to 0^+$ 或 $x \to +\infty$ 时是无穷大，$x \to 1$ 时是无穷小.
3. (1) 0；(2) 0；(3) ∞；(4) 0.

习题 1-4

1. (1) -9；(2) $\frac{5}{3}$；(3) 0；(4) $\frac{1}{2}$；(5) $+\infty$；

 (6) $\frac{1}{3}$；(7) 6；(8) 2；(9) $\frac{1}{3}$；(10) 0；

 (11) 1；(12) 0；(13) 2；(14) 0；(15) 0；

 (16) $3x^2$；(17) -1；(18) $\frac{1}{3}$.
2. (1) 0；(2) 1；(3) $\frac{1}{2}$；(4) -1；(5) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$；

 (6) $-2\sqrt{2}$；(7) $\sqrt{3}$；(8) $\frac{3}{2}$；(9) 0.
3. $a = 1$, $b = -1$.

习题 1-5

1. (1) $\frac{5}{2}$；(2) k；(3) $\frac{3}{7}$；(4) 1；(5) 1；(6) 9；(7) $\frac{1}{3}$；(8) 2.
2. (1) e^{-6}；(2) e^3；(3) e^{-3}；(4) e；(5) e^{-2}；(6) e^{-2}；

 (7) e^2；(8) e^4；(9) 1.

5. (1) $\frac{3}{2}$；(2) $\frac{1}{2}$；(3) $\frac{9}{2}$；(4) -2；(5) $\frac{1}{2}$；(6) 3.

习题 1-6

2. $k = 2$.
3. (1) 不连续；(2) 连续.
4. (1) $x = 0$, 可去间断点；(2) $x = 1$, 跳跃间断点；

(3) $x=1$，可去间断点；$x=2$，无穷间断点.

5. (1) $-\frac{1+e^2}{2e^2}$； (2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$； (3) 0； (4) 1；

(5) $\frac{1}{2}$； (6) -2； (7) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$； (8) -1.

习题 2-1

1. (1) $4+\Delta t$； (2) 4； (3) $2t_0+\Delta t$； (4) $2t_0$.
2. (1) a； (2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$； (3) $-\frac{3}{x^4}$； (4) $-\sin x$.
3. (1) $-f'(x_0)$； (2) $2f'(x_0)$； (3) $(a+b)f'(x_0)$.
4. (1) $2x$； (2) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$； (3) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$； (4) $\frac{13}{5}x\sqrt[5]{x^3}$； (5) $-\frac{19}{6}x^{-\frac{25}{6}}$；

   (6) $\frac{1}{x\ln 3}$； (7) $\frac{1}{x\ln 10}$.
5. 切线方程为 $x-ey=0$，法线方程为 $ex+y-(e^2-1)=0$.
6. $\left(\frac{1}{27},\frac{1}{3}\right)$，$\left(-\frac{1}{27},-\frac{1}{3}\right)$.
7. 连续但不可导.

习题 2-2

1. (1) $15x^4-2$； (2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$；

   (3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-3-\frac{1}{x\sqrt{x}}$； (4) $(2x+3)\sin x+(x^2+3x+5)\cos x$；

   (5) $\left(\frac{5}{2}\right)^x\ln\frac{5}{2}$； (6) $40^x\ln 40$；

   (7) $\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$； (8) $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$；

   (9) $e^x[(x^3+3x^2)\sin x+x^3\cos x]$；

   (10) $\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$.
2. (1) $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$，$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=0$； (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$；

   (3) $f'(0)=\frac{3}{25}$，$f'(2)=\frac{17}{15}$； (4) $f'(4)=-\frac{1}{18}$.
3. (1) $20(6x+5)(3x^2+5x+6)^{19}$； (2) $3k\cos(kx+b)\sin^2(kx+b)$；

   (3) $3x^2e^{x^3}$； (4) $\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$；

(5) $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; (6) $\dfrac{2\sec^2[\ln(2x+1)]}{2x+1}$;

(7) $\dfrac{10(4x^3+6x)\ln^9(x^4+3x^2+5)}{(x^4+3x^2+5)^2}$;

(8) $a^x[\cos(3x-2)\ln a-3\sin(3x-2)]$;

(9) $-\dfrac{3^{\sin\frac{1}{x}}\ln 3\cos\dfrac{1}{x}}{x^2}$; (10) $\dfrac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$;

(11) $-\dfrac{a^x\ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}}$; (12) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

(13) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; (14) $-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(15) $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$;

(16) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

(17) $\dfrac{a^{\arctan\sqrt{x}}\ln a}{2\sqrt{x}(1+x)}$; (18) $\dfrac{2^{\arctan x}\ln 2}{1+x^2}+\dfrac{2^x\ln 2}{1+4^x}$;

(19) $\sqrt{a^2+x^2}$; (20) $3\cos 3x\cos 2x-2\sin 3x\sin 2x$;

(21) $-\dfrac{2(\sin x+x\cos x)}{x^2\sin^2 x}$; (22) $-\dfrac{2}{\sin 2x}$;

(23) $\dfrac{1}{\cos x}$; (24) $\dfrac{3x^2+\sin x}{(x^3-\cos x)\ln 3}$;

(25) $-\dfrac{2}{x}\sin\ln x^2$; (26) $\tan^3 x$;

(27) $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}e^{\sqrt{1-\cos x}}$; (28) $7^{3x^2+2x+1}(6x+2)\ln 7$;

(29) $\dfrac{3^{\frac{x}{\ln x}}\ln 3(\ln x-1)}{\ln^2 x}$; (30) $\dfrac{a|x|}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$;

(31) $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$; (32) $\dfrac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$;

(33) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; (34) $e^x(\ln\sin x+\cot x)$;

(35) $2x\arcsin 2^x+\dfrac{x^2 2^x\ln 2}{\sqrt{1-4^x}}$;

(36) $5\cos 5x+5\sin^4 x\cos x+5x^4\cos x^5$.

4. (1) 0; (2) $-\dfrac{1}{18}\sin\dfrac{2}{3}$; (3) 0; (4) $\dfrac{9}{4}$.

习题 2-3

1. (1) $4-\dfrac{1}{x^2}$; (2) $4\mathrm{e}^{2x-1}$;

(3) $-2\sin x - x\cos x$; (4) $-2\mathrm{e}^{-t}\cos t$;

(5) $-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (6) $4+\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}+8x^{-3}$;

(7) $-\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$; (8) $2\sec^2 x\tan x$;

(9) $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; (10) $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(11) $-2\cos 2x\cdot\ln x-\dfrac{2\sin 2x}{x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$; (12) $\dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3}$;

(13) $2x\mathrm{e}^{x^2}(3+2x^2)$; (14) $-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. $f'''(2)=207360$.

5. (1) $n!$; (2) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$; (3) $(-1)^n\dfrac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$;

(4) $\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-2\right)\cdots\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}$;

(5) $\begin{cases} y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}\ (n\geqslant 2) \\ y'=\ln x+1 \end{cases}$;

(6) $\mathrm{e}^x(x+n)$.

习题 2-4

1. (1) $\dfrac{y}{y-x}$; (2) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; (3) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$; (4) $-\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}$.

2. 切线方程为 $x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=0$，法线方程为 $x-y=0$.

3. (1) $\dfrac{\sin(x+y)}{[\cos(x+y)-1]^3}$; (2) $\dfrac{\mathrm{e}^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$;

(3) $-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$; (4) $-\dfrac{1}{y^3}$.

4. (1) $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$;

(2) $-\dfrac{1}{2}(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}\left(\csc^2\dfrac{x}{2}\ln\tan 2x-8\cot\dfrac{x}{2}\csc 4x\right)$;

(3) $\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right]$;

(4) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$.

5. (1) $\frac{3b}{2a}t$; (2) $\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. $\sqrt{3}-2$.

7. (1) 切线方程为 $2\sqrt{2}x+y-2=0$，法线方程为 $\sqrt{2}x-4y-1=0$；

(2) 切线方程为 $x+2y-4=0$，法线方程为 $2x-y-3=0$；

(3) 切线方程为 $4x+3y-12a=0$，法线方程为 $3x-4y+6a=0$.

8. (1) $\frac{1}{t^3}$; (2) $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; (3) $\frac{4}{9}e^{3t}$.

习题 2-5

1. 当 $\Delta x=1$ 时，$\Delta y=18$，$dy=11$；

当 $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=1.161$，$dy=1.1$；

当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.110601$，$dy=0.11$.

2. (1) $\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$； (2) $(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$；

(3) $(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx$； (4) $\frac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$；

(5) $2x(1+x)e^{2x}dx$； (6) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$；

(7) $dy=\begin{cases}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0\\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1\end{cases}$；

(8) $8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$；

(9) $-\frac{2x}{1+x^4}dx$； (10) $A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt$.

3. (1) $2x+C$; (2) $\frac{3}{2}x^2+C$; (3) $\sin t+C$; (4) $-\frac{1}{\omega}\cos\omega t+C$;

(5) $\ln(1+x)+C$; (6) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; (7) $2\sqrt{x}+C$; (8) $\frac{1}{3}\tan 3x+C$.

4. (1) 1.025; (2) 0.8747; (3) 1.0174; (4) 0.005; (5) 0.795.

5. 251.2cm^3.

习题 3-1

3. (1) 1； (2) 2； (3) $-\frac{3}{5}$； (4) $\frac{m}{n}a^{m-n}$； (5) $-\frac{1}{8}$；

(6) 1； (7) 1； (8) 2； (9) $\frac{1}{3}$； (10) 6.

4. (1) -1； (2) 3； (3) 0； (4) 0； (5) $+\infty$； (6) 1.

5. (1) $\frac{1}{2}$； (2) ∞； (3) $-\frac{1}{2}$； (4) 1； (5) 0；

(6) $\frac{1}{2}$； (7) 1； (8) $e^{-\frac{2}{\pi}}$； (9) 0； (10) $\frac{1}{2}$.

习题 3-2

1. (1) $(0, +\infty)$ 为单调递增区间；

(2) $(-\infty, 1]$ 与 $[3, +\infty)$ 为单调递增区间，$[-1, 3]$ 为单调递减区间；

(3) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$为单调递减区间，$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 为单调递增区间；

(4) $(-\infty, 0]$ 为单调递增区间，$[0, +\infty)$ 为单调递减区间；

(5) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$与$\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$为单调递减区间，$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$为单调递增区间；

(6) $[0, 1]$ 为单调递增区间，$[1, 2]$ 为单调递减区间.

2. (1) 极大值 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$，极小值 $f(1) = -3$；

(2) 极小值 $f(-1) = -\frac{3}{2}$，极大值 $f(1) = \frac{3}{2}$；

(3) 极小值 $f(0) = 0$，无极大值；

(4) 极小值 $f(e) = e$，无极大值.

3. (1) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$与$[1, +\infty)$ 为单调递增区间，$\left[\frac{1}{5}, 1\right]$为单调递减区间，极大值 $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3456}{3125}$，极小值 $f(1) = 0$；

(2) $(-\infty, -1]$ 与$[0, 1]$ 为单调递减区间，$[-1, 0]$ 与$[1, +\infty)$ 为单调递增区间，极小值 $f(-1) = f(1) = -1$，极大值 $f(0) = 0$；

(3) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $(k \in Z)$ 为单调递增区间，无极值；

(4) $(-\infty, +\infty)$ 为单调递减区间，无极值.

习题 3-3

1. (1) 最大值 $f(\pm 2) = 13$，最小值 $f(\pm 1) = 4$；

(2) 最大值 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，最小值 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$；

(3) 最大值 $f(6)=8$，最小值 $f(8)=6$.

3. 高为$\frac{2l}{8+\pi}$，宽为$\frac{2l}{8+\pi}$.

4. $\frac{50}{3}(3-\sqrt{6})km$.

5. $\frac{a}{2}$.

6. $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$.

7. $y=-2x+6$.

习题 3-4

1. (1) 凸； (2) 凹； (3) 凹.

2. (1) $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$凸，$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$凹，拐点$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$；

   (2) $(-\infty,-1)$与$(1,+\infty)$凸，$(-1,1)$凹，拐点$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$；

   (3) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$凹，$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$凸，拐点$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$.

3. $a=-3$，拐点为$(1,-7)$，凸区间为$(-\infty,1)$，凹区间为$(1,+\infty)$.

4. (1) $x=1$ 及 $x=-1$ 为铅直渐近线，$y=0$ 为水平渐近线；

   (2) $x=-1$ 为铅直渐近线，$y=0$ 为水平渐近线；

   (3) $x=0$ 为铅直渐近线，$y=0$ 为水平渐近线；

   (4) $x=0$ 为铅直渐近线.

习题 3-5

1. (1) $ds=\sqrt{9x^4-6x^2+2}dx$；　(2) $ds=\sqrt{1+e^{2x}}dx$；

   (3) $ds=\sqrt{\frac{2+x^2}{1+x^2}}dx$；　(4) $ds=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$.

2. (1) $K=\frac{3}{50}\sqrt{10}$； (2) $K=2$； (3) $K=\left(\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{a^4b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

3. (1) $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$； (2) $R=2\sqrt{2}$； (3) $R=\frac{5\sqrt{5}}{4}$； (4) $R=\frac{1}{4}$.

4. 在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$处，$R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. 5837N.

习题 4-1

1. (1) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+C$；(2) $x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$；

(3) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$；(4) $\sin x+\cos x+C$；

(5) $\ln|x|+\arctan x+C$；(6) $\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{7^x}{\ln 7}+C$；

(7) $\frac{7^x e^x}{1+\ln 7}+C$；(8) $2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$；

(9) $-\cot x-2x+C$；(10) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a}-\arcsin x+C$.

2. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$.

3. $y=-x^4+7$.

习题 4-2

1. (1) $\frac{1}{6}(3+4x)^{\frac{3}{2}}+C$；(2) $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+C$；

(3) $\frac{1}{5}\ln|5x-3|+C$；(4) $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$；

(5) $-\frac{1}{3}\cot 3x+C$；(6) $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-5)|+C$；

(7) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$；(8) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；

(9) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4+x^3}+C$；(10) $\frac{1}{2}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$；

(11) $-e^{-x^2}+C$；(12) $-\cos e^x+C$；

(13) $\frac{1}{2}[\ln(\ln x)]^2+C$；(14) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$；

(15) $\cos\frac{1}{x}+C$；(16) $2\sin\sqrt{x}+C$；

(17) $-\tan\frac{1}{x}+C$；(18) $-a^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln a}+C$；

(19) $-\frac{1}{3}\cdot 10^{-3x+2}\cdot\frac{1}{\ln 10}+C$；(20) $\frac{1}{3}(\arctan x)^3+C$；

(21) $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C$；(22) $2\sqrt{1+\tan x}+C$；

(23) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$；

(24) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

(25) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$; (26) $\tan\frac{x}{2}+C$;

(27) $\frac{1}{2}\arctan(2x-3)+C$; (28) $\ln|\cos x+\sin x|+C$;

(29) $-\frac{2}{\sqrt{\sin\theta}}+C$; (30) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

2. (1) $2(\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|)+C$;

(2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C$;

(3) $6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$;

(4) $\sqrt{2x+1}+2\ln(\sqrt[4]{2x-1}+1)+C$;

(5) $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$;

(6) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{3+\sqrt{9-x^2}}\right|+C$;

(7) $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(8) $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{4x^2+9})+C$;

(9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C$;

(10) $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$;

(11) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|+C$;

(12) $\sqrt{x^2+2x+2}-\ln|\sqrt{(x+1)^2-1}+x+1|+C$;

(13) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$;

(14) $\ln|3x^2+7x+11|+C$;

(15) $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

习题 4-3

1. (1) $-x\cos x+\sin x+C$; (2) $x(\ln x-1)+C$;

(3) $e^x\ln x+C$;

(4) $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\sqrt{x^2+1}+C$;

(5) $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$;

(6) $\frac{1}{4}(2x-5)\cos 2x+\frac{1}{2}\left(x^2-5x+\frac{13}{2}\right)\sin 2x+C$;

(7) $\frac{1}{3}e^{2x}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)+C$;

(8) $\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$;

(9) $\frac{1}{13}e^{3x}(3\cos 2x+2\sin 2x)+C$;　(10) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$;

(11) $\tan x\ln\sin x-x+C$;　(12) $-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right]+C$;

(13) $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$;

(14) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$;

(15) $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$.

习题 4-4

1. (1) $\ln|x+2|-\ln|x+3|+C$;

(2) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$;

(3) $4\ln|x|-\frac{7}{4}\ln|2x-1|+\frac{9}{4}\ln|2x+1|+C$;

(4) $\frac{1}{4}\ln|1-x^2|-\frac{1}{2}\arctan x+C$;

(5) $\frac{1}{x+1}+\ln\sqrt{x^2-1}+C$;

(6) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C$;

(7) $3\ln|x+1|+2\ln|x^2+x+1|+C$;

(8) $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x+6}{x^2-3x+2}+C$;

(9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right|+\frac{1}{|\sqrt{3}|}\arctan\frac{2x+1}{|\sqrt{3}|}+C$;

(10) $-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{|\sqrt{3}|}\arctan\frac{2x+1}{|\sqrt{3}|}+C$.

2. (1) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+C$;

(2) $\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$；

(3) $\frac{1}{3}\left[\ln\left|3+\tan\frac{x}{2}\right|-\ln\left|3-\tan\frac{x}{2}\right|\right]+C$；

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right|-\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right|\right]+C$；

(5) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln(2+\cos x)+C$；

(6) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2}+C$；

(7) $x\tan\frac{x}{2}+C$；

(8) $\frac{1}{2}\text{in}|\cos x+\sin x|+\frac{1}{2}x+C$.

习题 5-1

1. $A=\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$.

2. (1) $\frac{3}{2}$；(2) 1；(3) $\frac{1}{2}\pi R^2$；(4) 0.

3. (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$.

4. (1) $2\leqslant\int_1^3 x^2\mathrm{d}x\leqslant 18$；　(2) $\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\pi}{3}$；

(3) $\frac{3\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin^2x)\mathrm{d}x\leqslant\pi$.

习题 5-2

1. (1) $\frac{29}{6}$；(2) $\frac{271}{6}$；(3) $\frac{1}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)$；(4) 1；

(5) $1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\mathrm{e}}-\arctan\mathrm{e}$；(6) 1；(7) $1+\frac{\pi}{4}$；(8) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$；

(9) -1；(10) $\frac{4}{5}$；(11) $2(2\sqrt{2}-1)$；(12) $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$；

(13) $2\sqrt{2}$；(14) 1；(15) $\frac{8}{3}$.

习题 5-3

1. (1) 0；(2) $\frac{51}{512}$；(3) $\frac{1}{4}$；(4) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$；(5) $\frac{\pi}{2}$；

(6) $\sqrt{2}(\pi+2)$； (7) $\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$； (8) $\frac{\pi a^4}{16}$； (9) $\frac{1}{6}$； (10) $2+2\ln\frac{2}{3}$；

(11) $(\sqrt{3}-1)a$； (12) $1-e^{-\frac{1}{2}}$； (13) $\frac{1}{5}$； (14) $\frac{\pi}{2}$； (15) $\frac{2}{3}$；

(16) $\frac{65}{4}$； (17) $\arctan e-\frac{\pi}{4}$； (18) $\ln\frac{3}{2}$； (19) $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{17}$； (20) $\frac{4}{3}$；

(21) $2\sqrt{2}$.

2. (1) 0； (2) $\frac{3}{2}\pi$； (3) $\frac{\pi^3}{324}$； (4) 0.

习题 5-4

1. (1) $1-\frac{2}{e}$； (2) $\frac{\pi^2}{4}-2$； (3) $\frac{1}{4}(e^2+1)$； (4) $2-\frac{3}{4\ln 2}$；

(5) $-\frac{2\pi}{\omega^2}$； (6) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$； (7) $\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$；

(8) $4(2\ln 2-1)$； (9) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$； (10) 1； (11) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

习题 5-5

1. (1) $\frac{1}{3}$； (2) 发散； (3) $\frac{1}{a}$； (4) $\frac{1}{2}$； (5) π；

(6) $\frac{\pi}{3}$； (7) 发散； (8) 发散；

(9) $\frac{3}{2}$； (10) $\frac{8}{3}$； (11) 1； (12) $\frac{\pi}{2}$.

习题 6-1

1. (1) $\frac{3}{2}-\ln 2$； (2) $\frac{7}{6}$； (3) $\frac{1}{6}$； (4) $\frac{1}{3}$；

(5) $\frac{9}{2}$； (6) $\frac{17}{4}$； (7) $2(\sqrt{2}-1)$； (8) $\frac{9}{2}$.

2. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$； (2) $3\pi a^2$.

3. (1) πa^2； (2) $\frac{1}{4}\pi a^2$.

习题 6-2

1. $\frac{16}{15}\pi ah^2$.

2. $\frac{2}{15}\pi$.

3. $4\pi^2$, $\frac{4}{3}\pi$.

4. $6\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{2a}\ln(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2})$.

5. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

习题 6-3

1. 2.45 焦耳.

2. $\frac{\pi}{12}\rho g R^3(3R+8h)$.

3. 99960π 焦耳.

4. $\frac{2}{3}\rho g R^3$.

5. 8.66×10^5； 牛顿.

6. $h=2\text{m}$.